Épreuve de Mathématiques 2 PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Questions de cours

1. Citer le théorème de Cauchy linéaire pour un système différentiel.

2. On rappelle que j est le nombre complexe : $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ où i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.

2.1 Déterminer le module et un argument de j.

2.2 Déterminer la valeur de $s_k = 1 + \mathrm{j}^k + \mathrm{j}^{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2.3 Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ du système : $\begin{cases} a+b & +c & =1 \\ a+\mathrm{j}\,b & +\mathrm{j}^2\,c & =0 \\ a+\mathrm{j}^2\,b & +\mathrm{j}\,c & =0 \end{cases}$ où a, b et c sont les inconnues.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Donner sans démonstration l'expression du déterminant de Vandermonde de la matrice

$$V_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_0^2 & \gamma_1^2 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \gamma_0^{n-1} & \gamma_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

Le résultat et l'expression obtenus dans la question 3. ne devront plus être utilisés dans la suite du problème

Partie 1

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 3, $\gamma = (\gamma_0, ..., \gamma_{n-1})$ une famille de n éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et

$$V_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_0^2 & \gamma_1^2 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \gamma_0^{n-1} & \gamma_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

1. Montrer que s'il existe un couple $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ avec $i \neq j$ tel que $\gamma_i = \gamma_j$, alors $\det(V_\gamma) = 0$.

2. On suppose les γ_i distincts deux à deux et on note C_j la colonne d'indice j de la matrice ${}^tV_\gamma$.

Soient λ_1, λ_2, ..., λ_n des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, C_j = 0$.

En utilisant le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, X^{j-1}$, montrer que : $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_j = 0$.

Que peut-on en déduire pour $\det(V_\gamma)$? **On ne calculera pas det**(V_γ).

3. On suppose toujours que les γ_k sont distincts deux à deux.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ψ_k par : $x \mapsto \mathrm{e}^{\gamma_k x}$

3.1 Soient $(m_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ des scalaires et $\Psi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k\, \psi_k$.

Calculer les dérivées successives de Ψ jusqu'à l'ordre $n-1$.

3.2 En déduire que la famille $(\psi_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est libre dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$

Partie 2

Soit (E_1) l'équation différentielle $y^{(3)} = y$.

1. Soit f une solution à valeurs complexes de cette équation.

1.1 Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) vérifiée par la fonction $g = f + f' + f''$.

1.2 Résoudre l'équation (E_2).

1.3 En déduire l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation (E_1).

2. Soit (S) le système différentiel à coefficients contants $X' = A\,X$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

où x, y et z sont des fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$.

2.1 La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

2.2 Résoudre le système (S).

2.3 Retrouver alors par cette méthode les solutions de l'équation (E_1) obtenues à la question **1.3.** de cette partie.

3. On considère la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)\,!}$.

3.1 Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. On note alors, lorsque cela existe, $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)\,!}$.

3.2 Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3.3 Déterminer les développements en série entière de φ', φ'', $\varphi^{(3)}$ puis $\varphi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3.4 En utilisant les questions précédentes, déterminer une expression de φ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

3.5 Déterminer une expression de $\psi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)\,!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles.**

3.6 Déterminer une expression de $\theta(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6n}}{(6n)\,!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles.**

Partie 3

Dans la suite du problème

- toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
- n est un entier naturel supérieur ou égal à 3,
- $\alpha = (a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ est un élément de $\mathbb{K}^n$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

En outre, lorsque $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, on note $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ qui est donc un élément de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$

Soient :

- (E_α) l'équation différentielle linéaire : $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \, y^{(k)}$,
- $\mathscr{S}_\alpha = \left\{ f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{K}),\ f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \, f^{(k)} \right\}$

1.

1.1 Ecrire l'équation différentielle (E_α) à l'aide d'un système différentiel.

1.2 Montrer que si $y \in \mathscr{S}_\alpha$, alors $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

1.3 Prouver que $\mathscr{S}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

1.4 Déterminer la dimension de $\mathscr{S}_\alpha$.

On prend jusqu'à la fin de cette partie : $\alpha = (1, 0, ..., 0)$ **et** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

2. Ecrire l'équation (E_α) dans ce cas.

3. Déterminer tous les nombres complexes r pour lesquels la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$ appartient à $\mathscr{S}_\alpha$.

4. Donner une base de $\mathscr{S}_\alpha$. (On pourra utiliser des résultats obtenus dans la partie **1**)

5. Soit d l'application qui à $y \in \mathscr{S}_\alpha$ associe $d(y) = y'$.

5.1 Vérifier que d est un endomorphisme de $\mathscr{S}_\alpha$.

5.2 d est-il bijectif ?

5.3 d est-il diagonalisable ?

Partie 4

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\left(\text{et donc } \mathscr{S}_\alpha = \left\{ f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \, f^{(k)} \right\}\right)$, $n = 2p$ et on considère l'équation différentielle : $y^{(2p)} = y$.

On note S_1 (resp. S_2) l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $y^{(p)} = y$ (resp. $y^{(p)} = -y$).

Pour f et g dans $\mathscr{S}_\alpha$, on note $(f|g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-3|t|} \left[f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t) \right] \mathrm{d}t$.

1. Montrer que cette expression a un sens pour tous f et g de $\mathscr{S}_\alpha$.

On admettra que pour tout f de $\mathscr{S}_\alpha$, on a au voisinage de $+\infty$: $f(t) = O(\mathrm{e}^t)$ et au voisinage de $-\infty$, $f(t) = O(\mathrm{e}^{-t})$.

2. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathscr{S}_\alpha$.

3. Montrer que S_1 et S_2 sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{S}_\alpha$.

4. <u>*Exemple*</u> : $n = 4$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)\,!}$.

On admet que f est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

4.1 Déterminer α de sorte que $f \in \mathscr{S}_\alpha$.

4.2 Expliciter les projetés orthogonaux de f sur S_1 et sur S_2.

4.3 En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles réelles.

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1121 – D'après documents fournis