e3a 2017 - PSI2

Dans tout le problème, on se donne $n \geq 2$ un entier et on note
- $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels
- O_n la matrice nulle de $\mathcal{E}$ et I_n la matrice identité
- ${}^tA$ la transposée d'un élément de $\mathcal{E}$
- $E_{i,j} \in \mathcal{E}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{E}$
- $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices **nilpotentes** de $\mathcal{E}$, c'est à dire des $A \in \mathcal{E}$ telles qu'il existe un entier p avec $A^p = O_n$.

Questions de cours

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$? En donner sans justification une base.
2. Soient $i, j, k, \ell \in [|1, n|]$. calculer le produit des matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$. On montrera en particulier que ce produit est nul lorsque $j \neq k$.
3. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1 Propriétés élémentaires

$\boxed{\text{Soit } A \text{ un élément de } \mathcal{N}}$

1. La matrice A peut-elle être inversible ? Justifier votre réponse.
2. On note $\mathrm{Sp}(A)$ le spectre de A, c'est à dire l'ensemble des valeurs propres complexes de la matrice A. Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et donner le polynôme caractéristique de A.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
4. Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par A, noté $\mathrm{Vect}(A)$, est inclus dans $\mathcal{N}$.
5. Vérifier que ${}^tA \in \mathcal{N}$.
6. Montrer que si M est semblable à A, alors $M \in \mathcal{A}$.
7. Montrer que $A^n = O_n$.
8. En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{E}$ soit nilpotente est que $M^n = O_n$.
   On pourra admettre ce résultat et l'utiliser dans la suite du problème.
9. Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quel est le rang maximal de A ?
10. Soient $B, C \in \mathcal{E}$.
    (a) On suppose que $BC \in \mathcal{N}$. Prouver alors que $CB \in \mathcal{N}$.
    (b) Ici, on suppose de plus que $B \in \mathcal{N}$ et $AB = BA$. Montrer que $AB \in \mathcal{N}$ et que $A + B \in \mathcal{N}$.
11. Déterminer l'ensemble de toutes les matrices symétriques réelles appartenant à $\mathcal{N}$.
12. **Dans cette question** on suppose que la matrice nilpotente A est antisymétrique.
    (a) Prouver que $A^2 = O_n$.
    (b) En déduire l'ensemble de toutes les matrices antisymétriques appartenant à $\mathcal{N}$ (on pourra utiliser la trace).

2 Exemples

Dans cette partie, M est une matrice de $\mathcal{E}$.

1. **Dans cette question**, on prend $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{E}$ définie par : $\forall (i,j) \in [|1,n|]^2,\ m_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ i \geq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$, c'est à dire

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer les éléments propres (valeurs propres et sous-espaces propres) de la matrice M.

   (b) On pose $S = M + {}^tM$. A-t-on $S \in \mathcal{N}$?
   Montrer que $S^2 \in \text{Vect}(I_n, S)$. Déterminer alors les éléments propres de la matrice S.

   (c) $\mathcal{N}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{N}$?

2. **Dans cette question on prend $n = 2$.**

   (a) On suppose que M est de rang 1.
   Montrer que $M^2 = \text{tr}(M)M$. En déduire que M est diagonalisable ou nilpotente.

   (b) Déterminer une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la diagonale n'est pas identiquement nulle.

   (c) En déduire l'ensemble de toutes les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3 Sous-espace engendré par $\mathcal{N}$

Soient

- T_0 le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ constitué des matrices de trace nulle
- V le sous-espace de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{N}$: $V = \text{Vect}(\mathcal{N})$, c'est à dire l'ensembme de toutes les combinaisons linéaires (finies) d'éléments de $\mathcal{N}$.

1. Déterminer la dimension de T_0.
2. Prouver que $\mathcal{N}$ et V sont inclus dans T_0.
3. Pour tout $j \in [|2,n|]$, on note

$$F_j = E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j} \quad \text{et} \quad G_j = F_j - E_{1,j} + E_{j,1}$$

   (a) Calculer F_j^2.

   (b) Montrer que $G_j \in V$

   (c) Soit $\mathcal{F}$ la famille de $\mathcal{E}$ constituée des $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $i,j \in [|1,n|]$ et de toutes les matrices G_k pour $k \in [|2,n|]$.
   Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre dans V.

   (d) En déduire que $V = T_0$.

4 Sous-espaces de dimension maximale contenus dans $\mathcal{N}$

On note $\mathcal{T}_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ constitué des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée uniquement de 0.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}_1$.

2. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice de $\mathcal{T}_1$. On pourra utiliser les résultats de la partie **1**.
3. Démontrer que $\mathcal{E} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}_1$.
4. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{N}$ dont la dimension est notée d.
   (a) On suppose que $d > \frac{n(n-1)}{2}$. Démontrer que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$. Conclure.
   (b) Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{N}$? Donner un exemple de tel sous-espace.

5 Un peu de topologie

$\mathcal{E}$ est muni de sa structure d'espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Montrer que $\mathcal{N}$ est une partie fermée de $\mathcal{E}$.
2. Soient $A \in \mathcal{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $M = I_n + \alpha A$.
   Montrer que $\det(M) = 1$. En déduire que toute boule ouverte de centre A contient au moins une matrice de rang n puis que l'intérieur de $\mathcal{N}$ est vide.
3. Soit F un sous-espace de $\mathcal{E}$. Montrer que si l'intérieur de F est non vide, alors $F = \mathcal{E}$.
   Retrouver alors le résultat de la question précédente.

6 Deux autres résultats

Soient $A \in \mathcal{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $M = I_n + \alpha A$.

1. On sait que M est inversible. Calculer son inverse à l'aide des puissances de la matrice A. On pourra utiliser une suite géométrique.
2. Donner sans démonstration le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^{1/2}$.
3. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{E}$ telle que $B^2 = M$. On exprimera B comme un polynôme de la matrice A.