e3a 2015 - PSI 2
durée 3 heures - calculatrices interdites

Dans tout le problème :

- E est un espace euclidien de dimension $p \geq 1$ dans lequel le produit scalaire sera noté $(.|.)$ et la norme associée $\|.\|$.
- $\mathcal{S}(E)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes symétriques de E.
- $T(E)$ désigne l'ensemble des éléments u de $\mathcal{S}(E)$ de rang inférieur ou égal à 1 et qui vérifient

$$\forall x \in E,\ (u(x)|x) \geq 0$$

Préliminaires

1. Justifier que $T(E)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on notera $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace. Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
   (a) Prouver que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
   (b) On suppose que B est semblable à A. Comparer $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(B)$.
   (c) Donner la définition de la trace d'un endomorphisme de E.
3. Rappeler la définition d'un hyperplan de E. On se donne alors un tel hyperplan H et on note G son complémentaire dans E. Déterminer (en justifiant) si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
   (a) G est un sous-espace vectoriel supplémentaire de H.
   (b) Pour tout vecteur a de G, $\mathrm{Vect}(a)$ est supplémentaire de H dans E.
   (c) Pour tout vecteur a non nul et orthogonal à H, $\mathrm{Vect}(a)$ est supplémentaire de H dans E.
   (d) Le noyau de l'application Tr est un hyperplan de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
   (e) Un endomorphisme de E est de rang 1 si et seulement si son noyau est un hyperplan de E.
4. Montrer que l'application

$$(f, g) \in \mathcal{S}(E)^2 \mapsto \langle f, g\rangle >= \mathrm{Tr}(f \circ g)$$

   est un produit scalaire.
   On notera pour la suite N lanorme associée à ce produit scalaire.
5. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.
   Donner les éléments propres de la matrice A.

Partie 1

Soit $a \in E$ et u_a l'endomorphisme de E défini par

$$\forall x \in E,\ u_a(x) = (x|a)a$$

1. Montrer que $u_a \in T(E)$.
2. On suppose dans cette question que $a \neq 0$.
   (a) Ecrire la matrice de u_a dans une base $\mathcal{B}$ de E constituée du vecteur a et d'une base de $\mathrm{Vect}(a)^{\perp}$.

(b) Déterminer alors $\mathrm{Tr}(u_a)$ et $\mathrm{Tr}(u_a \circ u_a)$ en fonction de a.

(c) Soit f un endomorphisme de E. Déterminer les éléments diagonaux de la matrice $f \circ u_a$ dans la base $\mathcal{B}$ définie précédemment.

(d) Calculer alors $\mathrm{Tr}(f \circ u_a)$ en fonction de a.

3. Soit $u \in T(E)$, u non nul et b un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(u)$.

(a) Montrer que b est un vecteur propre de u associé à une valeur propre μ positive.

(b) Prouver que $\forall x \in E,\ u(x) = \frac{\mu}{\|b\|^2}(x|b)b$.

(c) En déduire que $\mu > 0$.

(d) Montrer qu'il existe au moins un vecteur a de E tel que $u = u_a$.

4. L'application $\varphi\ :\ a \in E \mapsto \varphi(a) = u_a \in T(E)$ est-elle injective ? Surjective ?

Partie 2

Pour cette partie du problème, f est un endomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ qui est **fixé**.
Pour tout vecteur $x \in E$, on pose

$$\Phi(x) = [N(f - u_x)]^2 \quad \text{et} \quad m(f) = \inf_{x \in E} \Phi(x)$$

Pour tout vecteur x de E et tout vecteur y de E tel que $\|y\| = 1$, on pose

$$h_x\ :\ t \in \mathbb{R} \mapsto h_x(t) = \Phi(x + ty)$$

1. Justifier l'existence de $m(f)$.
2. Prouver que $\forall x \in E,\ \Phi(x) = [N(f)]^2 - 2(x|f(x)) + \|x\|^4$.
3. Montrer que h_x est une fonction polynomiale dont on précisera les coefficients.
4. justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E et de réels $(\lambda_i)_{i \in [1,p]}$ vérifiant

$$\forall i \in [1, p],\ f(e_i) = \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_p$$

5. Calculer alors $N(f)$ à l'aide des réels λ_i, $1 \leq i \leq p$.
6. Exprimer $\alpha = \sup\limits_{z \in E, \|z\|=1} (z|f(z))$ à l'aide des λ_i. Déterminer l'ensemble des vecteurs $z \in E$ unitaires tels que $(z|f(z)) = \alpha$.
7. On suppose que $m(f)$ est atteint en $a \in E$.

(a) Déterminer $h_a'(0)$.

(b) Prouver que $f(a) = \|a\|^2 a$.

(c) Prouver que pour tout réel t et tout vecteur y denorme 1,

$$\Phi(a + ty) - \Phi(a) = t^2[(t + 2(y|a))^2 + 2(\|a\|^2 - (y|f(y)))]$$

(d) Prouver que

$$m(f) = \Phi(a) \iff \begin{cases} f(a) = \|a\|^2 a \\ \forall y \in E \quad \text{tel que} \quad \|y\| = 1,\ (y|f(y)) \leq \|a\|^2 \end{cases}$$

8. On suppose que $\lambda_p \leq 0$.

(a) Prouver que $m(f) = \Phi(a)$ si et seulement si $a = 0$.

(b) Déterminer $m(f_A)$ où f_A est l'endomophisme de la question 5 des préliminaires.

9. On suppose que $\lambda_p > 0$.

(a) Démontrer que $m(f) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2$.

(b) Prouver que $m(f) = \Phi(x) \iff \begin{cases} x \in \ker(f - \lambda_p Id_E) \\ \|x\| = \sqrt{\lambda_p} \end{cases}$.

Partie 3

Dans cette partie, on prend $E = \mathbb{R}^p$ euclidien usuel.

1. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ symétrique et telle que

$$\begin{cases} \forall i,j \in [1,p]^2,\ m_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in [1,p],\ \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} = 1 \end{cases}$$

On note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à la matrice M.

(a) Prouver que $\lambda = 1$ est valeur propre et donner un vecteur propre associé.

(b) Soit λ une valeur propre de M et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Soit $k \in [1,p]$ tel que $|x_k| = \max\{|x_j|,\ 1 \leq j \leq p\}$. En considérant la k-ième ligne du système $MX = \lambda X$, prouver que $|\lambda| \leq 1$.

(c) Déterminer alors un vecteur a de $\mathbb{R}^p$ tel que $\Phi(a) = m(f_M)$. (On ne cherchera pas à calculer la valeur de $m(f_M)$).

(d) En déduire l'existence d'un endomorphisme v de $T(E)$ tel que $[N(f_M - v)]^2 = m(f_M)$.

(e) Reconnaître la nature géométrique de l'endomorphisme v et donner ses éléments remarquables.

2. Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 et f_B l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ qui lui est canoniquement associé. Calculer $m(f_B)$. Trouver un vecteur $b \in \mathbb{R}^p$ tel que $[N(f_B - u_b)]^2 = m(f_B)$.

3. On prend dans cette question $p > 1$. Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

et f_C l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ qui lui est canoniquement associé.

(a) Déterminer les éléments propres de la matrice C.

(b) Calculer $m(f_C)$.

(c) Trouver un vecteur c de $\mathbb{R}^p$ tel que $\Phi(c) = m(f_C)$ et un endomorphisme $w \in T(E)$ tel que $m(f_C) = [N(f_C - w)]^2$.

(d) Cet endomorphisme w est-il unique ?