MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Soient deux nombres complexes a et b tels que $\quad a \neq b \quad$ et $\quad a \neq 0$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère la matrice $A(a,b)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a & a \\ b & 0 & a & \cdots & a & a \\ b & b & 0 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & 0 & a \\ b & b & b & \cdots & b & 0 \end{pmatrix}$$

dont le terme général $\alpha_{i,j}$ est égal à 0 si $i = j$, à a si $i < j$ et à b si $i > j$.

1°. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de la matrice $A(a,b)$. Déterminer la dimension du sous–espace propre associé à λ.

2°. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A(a,b)$. Que peut–on en déduire ?

3°. On n'utilisera pas dans cette question les résultats des questions précédentes.

Soit F l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$(x,y) \mapsto F(x,y) = \det\left[A(a,b) - x\, I_n + y\, U\right]$$

où U est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le terme général est $u_{i,j} = 1$.

(a) Montrer que pour tout complexe x l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $y \mapsto F(x,y)$ est une fonction polynôme en y de degré inférieur ou égal à 1.

(b) Calculer $F(x,-a)$ et $F(x,-b)$ et en déduire $F(x,0)$ ainsi que le polynôme caractéristique de la matrice $A(a,b)$.

(c) Retrouver le résultat de la question 2°.

Exercice 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \mapsto f\left(x\right) = \frac{1}{4\cos x - 5}\cdot$$

Partie A. Changement de variable.

On pose $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

1°. (a) Montrer qu'il existe une unique fonction rationnelle F telle que $f\left(x\right) = F(z)$ pour tout réel x (on confondra dans la suite la fonction F et l'unique fraction rationnelle qui lui est associée).

(b) Décomposer F en éléments simples dans le corps $C(X)$ des fractions rationnelles.

(c) Décomposer F en une somme de deux fonctions développables en série entière, l'une de la variable z, l'autre de la variable $u = \dfrac{1}{z}\cdot$

2°. (a) Déterminer des coefficients a_n vérifiant l'égalité $f\left(x\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx$ pour tout réel x.

(b) Expliciter un développement en série de Fourier de f.

Partie B. Relation de récurrence.

Pour tout entier naturel n on note :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(x\right)\,\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

1°. Calculer a_0 et a_1.

2°. Calculer $a_{n+2} + a_n$ et en déduire une relation de récurrence entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.

3°. Calculer a_n en fonction de n et comparer au résultat de la partie précédente.

Exercice 3

Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et z la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$z\,(x,y) = F\left[\frac{\cos\,2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right]$$

où ch **représente la fonction cosinus hyperbolique** $t \mapsto \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})$.

1°. (a) Calculer $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ **et** $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ **en fonction de x, y et F'.**

(b) Calculer $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ **et** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ **en fonction de x, y, F' et F''.**

2°. Expliciter sous une forme simple les fonctions A et B telles que :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = A\,(x,y)\,F''\left[\frac{\cos\,2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right] + B\,(x,y)\,F'\left[\frac{\cos\,2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right].$$

3°. On pose $u = \dfrac{\cos\,2x}{\mathrm{ch}\,2y}\cdot$

(a) Vérifier que la relation $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ **se réduit à une équation différentielle du second ordre vérifiée par la fonction F de la seule variable u.**

(b) Intégrer cette équation différentielle et donner les solutions de l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ **en précisant le domaine de définition de ces solutions.**