

MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Pour tout réel $x > 0$ et entier $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n(x) = x^{-n} \ln(x)$, où le symbole $\ln$ désigne le logarithme népérien.

ø1 Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle ouvert $]0, 2[$. On appellera désormais a_n cette solution.

ø2 Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante [on pourra comparer $f_n(a_n)$ et $f_n(a_{n-1})$].

ø3 Montrer que cette suite (a_n) tend vers 1.

ø4 Soit Φ la fonction telle que $\Phi(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t}$, avec t réel strictement supérieur à -1 . Démontrer que Φ admet, en $t = 0$, un développement limité à tout ordre k , soit $\Phi(t) = \sum_{j=1}^k b_j t^j + o(t^k)$.

ø5 Étudier la nature de la suite $|b_j|$.

ø6 Montrer que, sur l'intervalle $] -1, e-1[$, la fonction Φ admet une fonction réciproque Ψ dont on donnera le tableau de variations.

ø7 Montrer que Ψ admet, en $u = 0$, un développement limité à tout ordre k , soit $\Psi(u) = \sum_{j=1}^k c_j u^j + o(u^k)$.

ø8 Donner pour a_n un développement limité d'ordre 2 vis-à-vis de l'infiniment petit $1/n$, soit $a_n = A + B/n + [C/(n^2)] + o(1/n^2)$, où l'on précisera les constantes A , B et C .

ø9 Prouver que les coefficients c_j sont tous strictement positifs [on pourra utiliser une équation différentielle du premier ordre reliant $\Psi(u)$ et $[d/du] \Psi(u)$ afin d'exprimer c_k en fonction des c_j d'indices $j < k$].

Exercice 2

Pour tout x réel dans l'intervalle ouvert $I =]-(\pi/2), (\pi/2)[$, on pose : $f(x) = 1/\cos(x)$. La dérivée d'ordre n de f en x est ici notée $f^{(n)}(x)$, avec la convention $f^{(0)}(x) = f(x)$.

ø1 (a) Prouver l'existence et l'unicité d'un polynôme P_n tel que : $f^{(n)}(x) = (P_n(\sin(x)))/(\cos(x)^{n+1})$

(b) Donner une relation entre P_{n+1} , P_n et P'_n .

(c) Préciser P_0 , P_1 et P_2 .

(d) Déterminer le monôme de plus haut degré de P_n .

(e) Examiner la parité du polynôme P_n .

ø2 (a) Montrer que les coefficients du polynôme P_n sont des entiers positifs ou nuls.

(b) Que vaut $P_n(1)$?

ø3 On pose $a_n = 1/n!$, $f^{(n)}(0)$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ et $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$. Pour tout $x \in I$, justifier la formule :

$$f(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du.$$

ø4 Prouver que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à $[(\pi)/2]$.

ø5 (a) Pour tous $0 \leq x < y \leq [(\pi)/2]$, prouver que : $0 \leq R_n(x) \leq (x/y)^{n+1} R_n(y)$.

(b) Prouver également que : $0 \leq R_n(x) \leq (x/y)^{n+1} f(y)$.

ø6 En déduire que, pour tout $x \in I$, on a : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$.

ø7 (a) Démontrer que la suite (a_{2k}) tend vers 0.

(b) Pour tout $\varepsilon \in]0, [(\pi)/2[$, montrer l'existence d'une constante $M_\varepsilon > 0$ telle que :

$$0 \leq a_{2k} \leq M_\varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right)^{-2k}.$$

(c) Montrer que la suite $(a_{2k} 2^k)$ est bornée.

(d) On donne la formule suivante : $a_{2k} = [(2^{2k+2})/(\pi^{2k+1})] \sum_{n=0}^{+\infty} [((-1)^n)/((2n+1)^{2k+1})] \cdot$ Démontrer les relations $[1/(3^k)] \leq a_{2k} \leq [1/(2^k)]$ [on pourra éventuellement s'aider d'une calculatrice].

Exercice 3

On note $R[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $R_k[X]$ le sous-ensemble de $R[X]$ constitué des polynômes nuls ou dont le degré est inférieur ou égal à k . Le coefficient binomial $[n!/(k!(n-k)!)]$ sera noté $[n \parallel k]$, ou bien C_n^k , au choix. On suppose n entier supérieur ou égal à 1 dans toute la suite.

ø1 (a) Montrer l'existence de polynômes f_n et g_n dans $R_{n-1}[X]$, tels que :

$$(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1,$$

ceci par développement de $((1-X)+X)^{2n-1}$, ou autrement [NB : on ne demande pas de calculer leurs coefficients].

(b) Préciser les polynômes f_1 , f_2 et f_3 .

ø2 Déterminer en fonction de f_n et de g_n tous les couples (A,B) de polynômes de $R[X]$ tels que $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$. Démontrer l'unicité de f_n et de g_n .

ø3 (a) Montrer que $f_n(1-X) = g_n(X)$.

(b) Calculer $f_n(0)$, $f_n(1)$ et $f_n(1/2)$.

ø4 (a) Dans tout ce qui suit, x désigne une variable réelle. Pour x tendant vers 0, démontrer la formule asymptotique suivante : $f_n(x) = (1-x)^{-n} + o(x^{n-1})$.

(b) En déduire les coefficients du polynôme f_n .

(c) L'équation $f_n(x) = 0$ peut-elle avoir une racine positive ou nulle ?

ø5 (a) Établir, pour tout x réel, la relation $n f_n(x) - (1-x) f'_n(x) = n [(2n-1) \parallel n] x^{n-1}$.

(b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ ne peut pas avoir deux racines réelles strictement négatives.

ø6 Pour tout x réel, on pose : $h_n(x) = \int_0^x t^{n-1} (1-t)^{n-1} dt$. Suivant la parité de n , donner le tableau des variations de la fonction h_n .

ø7 (a) Démontrer que, pour tout $x \neq 1$, on a : $f_n(x) = [(1-n [(2n-1) \parallel n]) h_n(x)] / ((1-x)^n) \cdot$

(b) Ce résultat est-il en accord avec la valeur de $f_n(1)$ trouvée plus haut ?

ø8 Discuter selon n le nombre de racines de l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

ø9 Prouver que les racines de $f_n(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$, sont de modules strictement inférieurs à 1.
