

# MATHÉMATIQUES

## Exercice 1

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie,  $F$  un sous-espace de  $E$  et  $G$  un groupe fini d'automorphismes linéaires de  $E$ , de cardinal  $m$ , tel que  $F$  soit stable par tout élément  $g$  de  $G$ .

Le produit  $u \circ v$  de deux endomorphismes de  $E$  sera noté plus simplement  $uv$ .

À tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , on associe  $u^+$  défini par :

$$u^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1}ug.$$

1°. Montrer que  $u^+$  est un endomorphisme de  $E$  commutant avec tout élément  $h$  de  $G$ .

2°. Calculer  $(u^+)^+$ .

3°. Calculer la trace de  $u^+$  en fonction de celle de  $u$ .

4°. Soit  $p$  un projecteur de  $E$  d'image  $F$ . Montrer que  $F$  est inclus dans l'image de  $p^+$ .

5°. Montrer que, pour tous  $g$  et  $h$  de  $G$ , on a  $g^{-1}pgh^{-1}ph = h^{-1}ph$ .

6°. Montrer que  $p^+$  est un projecteur.

7°. Comparer les images de  $p$  et de  $p^+$ .

8°. Montrer que le noyau de  $p^+$  est un supplémentaire de  $F$  stable par tout élément  $g$  de  $G$ .

9°. Montrer que tout sous-espace vectoriel de  $E$  stable par tout  $g$  de  $G$  admet un supplémentaire stable par tout  $g$  de  $G$ .

## Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  privée du couple  $(0, 0)$  par la relation :

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Soient  $u, v$  et  $\rho$  des nombres réels liés par les relations  $0 < \rho = \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1$ .

1°. Démontrer les inégalités  $|u + v| \leq \rho \sqrt{2}$  et  $|u - v| \leq \rho \sqrt{2}$ .

2°. Soit  $D(u, v) = 2(u + 1)^2 + 2(v + 1)^2$ . Démontrer l'inégalité  $3D(u, v) > 1$ .

3°. Soit, sous les mêmes conditions,  $N(u, v) = (u^2 - v^2)(u^2 + v^2) + 4uv(u - v)$ . Démontrer l'inégalité  $|N(u, v)| \leq 2\rho^3\sqrt{2} + \rho^4$ .

4°. Soit, sous les mêmes conditions,  $g(u, v) = f(1 + u, 1 + v) - (u - v) - \frac{v^2 - u^2}{2}$ . Montrer que  $\frac{|g(u, v)|}{\rho^3}$  est borné par une constante indépendante de  $\rho$  lorsque  $\rho$  tend vers zéro (on déterminera une telle constante sous la forme d'un entier).

5°. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$  en un point  $(x, y)$ .

6°. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$  en un point  $(x, y)$ .

7°. Interpréter à la lumière de ces résultats la majoration obtenue dans la question 4°.

8°. Calculer la tangente de l'angle  $\theta$  du plan d'équation  $z = 0$  et du plan tangent au point  $(x, y, z)$  de la surface définie par l'équation  $z = f(x, y)$  dans un repère orthonormé.

9°. Décrire le mouvement de ce plan tangent lorsque le point  $(x, y, 0)$  décrit une demi-droite du plan  $z = 0$  d'origine  $(0, 0)$ .

### Exercice 3

L'exercice étudie quelques propriétés des triangles pseudo-rectangles, c'est-à-dire des triangles  $ABC$  d'un plan euclidien dont les mesures des angles, par définition strictement comprises entre 0 et  $\pi$ , notées  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$ , vérifient la relation :

$$\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{2}.$$

Les longueurs des côtés sont notées  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ . Les questions ci-dessous sont largement indépendantes entre elles.

1°. Décomposer un triangle équilatéral en trois triangles pseudo-rectangles.

2°. Déterminer le milieu du segment  $BB'$  où  $B'$  est l'intersection de la droite  $BC$  et de la perpendiculaire issue de  $A$  à la droite  $AC$ .

3°. Que peut-on dire des angles de la droite  $BC$  avec les deux bissectrices de l'angle en  $A$  du triangle  $ABC$  ?

4°. Calculer  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et l'aire  $S$  du triangle en fonction de  $\hat{A}$  et du rayon  $R$  de son cercle circonscrit.

5°. Les points  $B$  et  $C$  étant fixés dans le plan, indiquer une construction géométrique du troisième sommet  $A$  à partir de la mesure de l'angle en  $C$ . Quel est le lieu de ce sommet ?

6°. Que peut-on dire de la tangente en  $A$  au cercle circonscrit au triangle  $ABC$  ?

7°. Que peut-on dire de l'orthocentre du triangle  $ABC$  ?

8°. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $\hat{A}$ ,  $R$  et la distance  $h$  de  $A$  à la droite  $BC$  pour qu'un triangle soit pseudo-rectangle.