

MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien; on note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $O(E)$ le groupe orthogonal de E ; pour tout endomorphisme f , f^* désigne l'adjoint de f et, pour tout sous-espace vectoriel F de E , on note $p_{[\parallel F]}$ la projection orthogonale de E sur F : $p_{[\parallel F]} \in L(E)$.

ø1 Soit $f = p_{[\parallel F]} \circ g$ où F est un sous-espace vectoriel de E et $g \in O(E)$.

(a) Préciser $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ à l'aide de F et g .

(b) Montrer l'existence d'un unique sous-espace vectoriel F' de E tel que :

$$p_{[\parallel F]} \circ g = g \circ p_{[\parallel F']}.$$

(c) Donner une expression simplifiée de $f \circ f^* \circ f$.

ø2 Soit F un sous-espace vectoriel fixé de E , distinct de E et de $\{0\}$.

(a) Soit $g \in O(E)$; établir une condition nécessaire et suffisante pour que $p_{[\parallel F]}$ et g commutent.

(b) Soit G l'ensemble des $p_{[\parallel F]} \circ g$ tels que $p_{[\parallel F]} \circ g = g \circ p_{[\parallel F]}$ avec $g \in O(E)$; montrer que $(G, \circ)$ est un groupe isomorphe à un groupe connu; G est-il un sous-groupe du groupe linéaire de E ?

(c) Montrer que l'ensemble des $p_{[\parallel F]} \circ g$ obtenu lorsque g décrit $O(E)$ n'est pas stable par l'opération de composition.

ø3 Soit $f \in L(E)$ tel que $f \circ f^* \circ f = f$.

(a) Établir que $f \circ f^*$ est une projection orthogonale.

(b) Montrer que : $\forall x \in (\text{Ker } f)^\perp, \|f(x)\| = \|x\|$.

(c) En déduire l'existence d'un sous-espace vectoriel F de E et d'une application $g \in O(E)$ tels que : $f = p_{[\parallel F]} \circ g$.

Exercice 2

ø1 (a) Pour quels réels x la fonction $x \rightarrow f(x) = \int_0^{+\infty} [(t^x)/((1+t)^2)] dt$ est-elle définie ?

(b) Pour $t > 0$ fixé, développer en série entière en 0 la fonction $x \rightarrow [(t^x)/((1+t)^2)]$.

ø2 (a) Calculer $\int_0^1 (\ln t)^n dt$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $[n!/4] \leq \int_0^1 [(|\ln t|^n)/((1+t)^2)] dt \leq n!$.

ø3 (a) Établir une relation simple entre $\int_0^1 [((\ln t)^n)/((1+t)^2)] dt$ et $\int_1^{+\infty} [((\ln t)^n)/((1+t)^2)] dt$.

(b) Montrer que la fonction f est développable en série entière en 0 et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

04 On pose dans cette question $x = [1/2p]$, $p \in \mathbb{N}^*$ et l'on veut calculer $\int_0^{+\infty} [(t^{1/2p})/((1+t)^2)] dt$.

On rappelle que pour $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ fixé, la fonction $u \rightarrow [1/(u-\omega)]$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $u \rightarrow \ln|u-\omega| + i \arg(u-\omega)$, où $\arg(u-\omega)$ désigne l'argument de $u-\omega$ strictement compris entre $-\pi$ et π .

(a) Montrer que $\int_0^{+\infty} [(t^{1/2p})/((1+t)^2)] dt = \int_0^{+\infty} [du/(1+u^{2p})]$

(b) En précisant les éléments de l'ensemble Ω , établir la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{1}{1+u^{2p}} = - \frac{1}{2p} \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\omega}{u-\omega} \quad \text{c.d.t.p}$$

(c) Montrer qu'en calculant $\int_0^{+\infty} [du/(1+u^{2p})]$ la partie logarithmique s'annule.

(d) En posant $\alpha = e^{2\pi i/p}$, simplifier $(1-\alpha) \sum_{k=0}^{p-1} \alpha^k$ et en déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2} dt = \frac{\pi/2p}{\sin(\pi/2p)} \quad \text{c.d.t.p}$$

05 Montrer que la fonction $x \rightarrow \pi x - f(x) \sin \pi x$ est développable en série entière en 0 et en déduire que :

$$\forall x \in]-1, +1[, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^2} dt = \frac{\pi x}{\sin \pi x} \quad \text{c.d.t.p}$$

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $([(\rightarrow) \parallel a], [(\rightarrow) \parallel b], [(\rightarrow) \parallel c])$ une base de E que l'on ne suppose pas orthonormale; l'ensemble $R = \mathbb{C}[(\rightarrow) \parallel a] + \mathbb{C}[(\rightarrow) \parallel b] + \mathbb{C}[(\rightarrow) \parallel c]$ des combinaisons linéaires de $([(\rightarrow) \parallel a], [(\rightarrow) \parallel b], [(\rightarrow) \parallel c])$ à coefficients entiers forme alors un sous-groupe de $(E, +)$ appelé *réseau* engendré par $([(\rightarrow) \parallel a], [(\rightarrow) \parallel b], [(\rightarrow) \parallel c])$.

01 Soit D une *droite réticulaire* de R , c'est-à-dire une droite vectorielle de E contenant au moins un vecteur non nul de R ; établir l'existence dans $D \cap R$ de $[(\rightarrow) \parallel u] = x[(\rightarrow) \parallel a] + y[(\rightarrow) \parallel b] + z[(\rightarrow) \parallel c]$ non nul tel que $x^2 + y^2 + z^2$ soit minimum et en déduire que $D \cap R = \mathbb{C}[(\rightarrow) \parallel u]$.

02 Notant $\Delta = \det([(\rightarrow) \parallel a], [(\rightarrow) \parallel b], [(\rightarrow) \parallel c])$ le produit mixte de $([(\rightarrow) \parallel a], [(\rightarrow) \parallel b], [(\rightarrow) \parallel c])$, on pose :

$$\rightarrow A = \frac{1}{\Delta} (\rightarrow b \wedge \rightarrow c), \quad \rightarrow B = \frac{1}{\Delta} (\rightarrow c \wedge \rightarrow a), \quad \rightarrow C = \frac{1}{\Delta} (\rightarrow a \wedge \rightarrow b).$$

(a) Exprimer simplement le produit scalaire $(x[(\rightarrow) \parallel a] + y[(\rightarrow) \parallel b] + z[(\rightarrow) \parallel c] \mid \alpha[(\rightarrow) \parallel A] + \beta[(\rightarrow) \parallel B] + \gamma[(\rightarrow) \parallel C])$.

(b) Montrer que $([(\rightarrow) \parallel A], [(\rightarrow) \parallel B], [(\rightarrow) \parallel C])$ forme une base de E .

ø3 Soit P un *plan réticulaire* de R , c'est-à-dire un plan vectoriel de E contenant au moins deux vecteurs linéairement indépendants de R ; montrer l'existence d'un couple $([(\rightarrow) \parallel u], [(\rightarrow) \parallel v])$ de vecteurs linéairement indépendants de $P \cap R$ tels que $X^2 + Y^2 + Z^2$ soit minimum lorsque $[(\rightarrow) \parallel u] \wedge [(\rightarrow) \parallel v] = X[(\rightarrow) \parallel A] + Y[(\rightarrow) \parallel B] + Z[(\rightarrow) \parallel C]$, et en déduire que $P \cap R = \mathbb{C}[(\rightarrow) \parallel u] + \mathbb{C}[(\rightarrow) \parallel v]$.

ø4 Dans ce qui suit, P désigne un plan réticulaire de R , comme défini ci-dessus.

(a) Établir l'existence d'un triplet (α, β, γ) de nombres entiers relatifs premiers entre eux et tels que, pour $[(\rightarrow) \parallel w] = x[(\rightarrow) \parallel a] + y[(\rightarrow) \parallel b] + z[(\rightarrow) \parallel c]$, on ait :

$$[(\rightarrow) \parallel w] \in P \cap R \Leftrightarrow (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \text{ et } \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

(b) Étant donné un tel triplet (α, β, γ) , on définit pour $k \in \mathbb{C}$ les plans affines P_k d'équations $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$ dans la base $([(\rightarrow) \parallel a], [(\rightarrow) \parallel b], [(\rightarrow) \parallel c])$; montrer que les $P_k \cap R$ définissent une partition de l'ensemble R .

(c) Exprimer la distance entre P_k et P_{k+1} à l'aide de $[(\rightarrow) \parallel N] = \alpha[(\rightarrow) \parallel A] + \beta[(\rightarrow) \parallel B] + \gamma[(\rightarrow) \parallel C]$.