

Concours ENSAM - ESTP - ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1
durée 4 heures

Notations :

n et q sont des entiers naturels donnés.

$\mathcal{M}(n, q)$ désigne l'ensemble des matrices réelles ou complexes à n lignes et q colonnes.

I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et s un élément de I . Le réel 0 est supposé appartenir à l'intervalle I .

Une fonction matricielle de type (n, q) définie sur I est une application M de I vers $\mathcal{M}(n, q)$, $M = [m_{i,j}]$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q$) où, pour tout i de 1 à n et pour tout j de 1 à q , $m_{i,j}$ est une application de I vers $\mathbb{R}$ qui au réel t associe le réel $m_{i,j}(t)$.

Soient $M = [m_{i,j}]$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q$) et $L = [l_{i,j}]$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q$) deux fonctions matricielles de type (n, q) définies sur I . La notation $M = L$ signifie que pour tout i de 1 à n et pour tout j de 1 à q , $m_{i,j} = l_{i,j}$ (égalité entre deux applications de I vers $\mathbb{R}$).

La fonction matricielle M de type (n, q) définie sur I est continue en s (respectivement dérivable ou de classe $\mathcal{C}^k$ en s) si chaque fonction réelle $m_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q$) est continue en s (respectivement dérivable ou de classe $\mathcal{C}^k$ en s) et la fonction matricielle dérivée est définie en s par :

$$\frac{dM}{dt}(s) = \left[\frac{dm_{i,j}(s)}{dt} \right], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q$$

et de même pour les dérivées d'ordre supérieur si elles existent.

La fonction matricielle M de type (n, q) définie sur I est continue sur I (respectivement dérivable ou de classe $\mathcal{C}^k$ sur I) si elle est continue (respectivement dérivable ou de classe $\mathcal{C}^k$) en tout point de I .

L'intégrale définie de la fonction matricielle M continue sur I , entre les bornes α et β de I est la matrice réelle à n lignes et q colonnes définie par :

$$\int_{\alpha}^{\beta} M(u) du = \left[\int_{\alpha}^{\beta} m_{i,j}(u) du \right], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q$$

Première partie :

Le produit de deux matrices M_1 et M_2 de $\mathcal{M}(n, n)$ est noté $M_1.M_2$.

Question 1 : α et β désignent deux éléments de I tels que $\alpha < \beta$ et C est une matrice de $\mathcal{M}(n, n)$. La fonction matricielle M de type (n, n) étant supposée continue sur I , montrer que :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (C.M)(u) du = C. \int_{\alpha}^{\beta} M(u) du$$

Question 2 : Soient $F = [f_{i,j}]$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) et $G = [g_{i,j}]$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) deux fonctions matricielles dérivables de type (n, n) définies sur I . Montrer que le produit matriciel $F.G$ définit une nouvelle fonction matricielle dérivable de type (n, n) sur I et que

$$\frac{d(F.G)}{dt} = \frac{dF}{dt}.G + F.\frac{dG}{dt}$$

Question 3 : s désigne un élément de I .

Soit $H = [h_{i,j}]$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) une fonction matricielle dérivable de type (n, n) définie sur I et telle que la matrice $H(s)$ soit inversible, d'inverse $H^{-1}(s)$. Montrer que la fonction matricielle H^{-1} est définie et dérivable sur un voisinage V de s et vérifie :

$$\forall u \in V, \frac{d(H^{-1})}{dt}(u) = -H^{-1}(u). \frac{dH}{dt}(u). H^{-1}(u)$$

Seconde Partie :

I_n désigne la matrice identité d'ordre n . Soit A une matrice réelle à n lignes et n colonnes admettant les valeurs propres (réelles ou complexes) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, chacune apparaissant avec son ordre de multiplicité. Les matrices $A_0, A_1, \dots, A_n$ sont définies par :

$$A_0 = I_n \text{ et } A_k = A_{k-1} \cdot (A - \lambda_k I_n), \quad 1 \leq k \leq n$$

$r_1, r_2, \dots, r_n$ désignent les applications de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) définies par :

$$\frac{dr_1}{dt}(t) = \lambda_1 r_1(t) \text{ et } r_1(0) = 1$$

$$\frac{dr_k}{dt}(t) = \lambda_k r_k(t) + r_{k-1}(t) \text{ et } r_k(0) = 0, \quad 2 \leq k \leq n$$

Soit M la fonction matricielle de type (n, n) définie sur I par :

$$\forall t \in I, M(t) = \sum_{j=1}^{j=n} r_j(t) \cdot A_{j-1}$$

Question 1 : Déterminer la matrice M lorsque $n = 1$.

L'entier n est maintenant quelconque.

Question 2 : Expliciter la matrice A_n .

Question 3 : Déterminer la matrice $M(0)$.

Question 4 : Vérifier l'égalité suivante :

$$\frac{dM}{dt}(t) - \lambda_n M(t) = \sum_{j=0}^{j=n-2} r_{j+1}(t) \cdot [(\lambda_{j+1} - \lambda_n) \cdot A_j + A_{j+1}]$$

Question 5 : En déduire que

$$\forall t \in I, \frac{dM}{dt}(t) = A \cdot M(t)$$

Question 6 : Déterminer une fonction matricielle Φ_A , dérivable de type (n, n) définie sur I et vérifiant :

$$\forall t \in I, \frac{d\Phi_A}{dt}(t) = A \cdot \Phi_A(t) \text{ et } \Phi_A(0) = I_n$$

Prouver l'unicité de Φ_A et exprimer Φ_A en fonction de la matrice M .

Question 7 : Application numérique :

Déterminer $\Phi_A(t)$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 8 : α et β non nul sont deux réels et $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Donner une interprétation géométrique de l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ représentée par la matrice $\Phi_A(t)$ dans une base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Troisième partie :

Dans cette partie, les preuves seront fondées sur la définition de la matrice Φ_A donnée en deuxième partie. L'entier n est quelconque, A et B sont deux matrices réelles à n lignes et n colonnes. u et v sont deux éléments de l'intervalle I .

Question 1 : Prouver que $\Phi_A(u + v) = \Phi_A(u) \cdot \Phi_A(v)$.

Question 2 : Montrer que $\Phi_A(u)$ est inversible et donner son inverse.

Question 3 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comparer $A \cdot B$ et $B \cdot A$.

Calculer et comparer $\Phi_{A+B}(u)$ et $\Phi_A(u) \cdot \Phi_B(u)$.

Question 4 : Dans le cas où les matrices A et B sont permutables (cest à dire $A.B = B.A$) , prouver que $\Phi_{A+B}(u) = \Phi_A(u). \Phi_B(u)$.

Quatrième partie :

α est un élément de I . A est une matrice donnée dans $\mathcal{M}(n, n)$.

Question 1 : Dans cette question, pour tout i de 1 à n , et tout j de 1 à n , $q_{i,j}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I^2 vers $\mathbb{R}$ (qui associe au couple (t, s) de I^2 le réel $q_{i,j}(t, s)$). Soit Q la fonction matricielle réelle à deux variables de type (n, n) définie sur I^2 par

$$Q = [q_{i,j}](1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$$

Montrer l'égalité matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\alpha}^t Q(t, s) ds \right] = Q(t, t) + \int_{\alpha}^t \frac{\partial Q}{\partial t}(t, s) ds$$

Il sera opportun d'introduire L , fonction matricielle réelle à deux variables de type (n, n) définie sur I^2 par

$$\forall (t, s) \in I^2, L(t, s) = \Phi_A(t).(\Phi_A)^{-1}(s)$$

Question 2 : Soit, une fonction matricielle continue B , de type $(n, 1)$ définie sur I et une matrice D unicolonne à n lignes.

La fonction matricielle R à deux variables, de type (n, n) définie sur I^2 est donnée par

$$\forall (t, s) \in I^2, R(t, s) = \Phi_A(t).(\Phi_A)^{-1}(s)$$

Montrer que la fonction matricielle Y de type $(n, 1)$ définie sur I , solution du système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = A.Y(t) + B \\ Y(0) = D \end{cases}$$

est unique et qu'elle est donnée par :

$$\forall t \in I, Y(t) = R(t, 0).D + \int_0^t R(t, s).B(s)ds$$

Question 3 : Application lorsque $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer la fonction matricielle Φ_A et donner la solution du système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = A.Y(t) + B \\ Y(0) = D \end{cases}$$