



Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1 PC

durée 3 heures

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée

Exercice 1

On note sh la fonction d'une variable réelle définie par $\text{sh}(t) = (e^t - e^{-t})/2$.

On note α le réel $\ln(1 + \sqrt{2})$.

On considère la suite $I = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^\alpha (\text{sh} t)^n dt.$$

1°. *Limite de la suite I .*

(a) Résoudre l'équation $\text{sh} t = 1$.

(b) Soit t dans $[0, \alpha[$. Etudier la limite de la suite $((\text{sh}(t))^n)_{n \geq 0}$.

(c) A l'aide du théorème de convergence dominée (dont on rappellera l'énoncé), déterminer la limite de la suite I .

2°. *Equivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.*

- (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$, pour tout entier naturel $n \geq 2$.
- (b) Démontrer que la suite I est décroissante et déduire de la relation précédente un encadrement de I_n .
- (c) Déduire des résultats précédents un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3°. *Etude des séries $\sum I_n$ et $\sum (-1)^n I_n$.*

- (a) Quelle est la nature de la série $\sum I_n$?
- (b) Montrer que la série $\sum (-1)^n I_n$ est convergente et que sa somme vaut :

$$\int_0^\alpha \frac{1}{1 + \operatorname{sh}(t)} dt.$$

Exercice 2

Soit H une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Pour tout réel non nul λ , on pose :

$$J(\lambda) = \int_0^1 H(t) \cos(\lambda t) dt.$$

1°. Justifier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$.

2°. Soit f la fonction (2π -périodique) de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin t|$.

- (a) Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f .
- (b) Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ (on citera précisément le théorème utilisé).

3°. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties qu'il existe une constante k dépendant de H telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, |J(\lambda)| \leq k|\lambda^{-1}|.$$

4°. A l'aide des résultats précédents, établir que:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 H(t) |\sin(\lambda t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 H(t) dt.$$

Exercice 3

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 et n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère une application linéaire f définie sur E telle qu'il existe $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une famille de vecteurs de E vérifiant :

pour tout i dans $\{1, 2, \dots, n-1\}$, $f(u_i) = u_{i+1}$ et $f(u_n) = u_1$.

On suppose de plus que $u_i \neq u_1$, pour i ($2 \leq i \leq n$).

1°. *Etude de la famille $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.*

- (a) Montrer que les n éléments de la famille $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ sont deux à deux distincts.
- (b) On se propose de démontrer par l'absurde que les vecteurs u_1 et u_2 sont linéairement indépendants. Soit α un réel tel que $u_2 = \alpha u_1$. Montrer que $\alpha^n = 1$ et en déduire une contradiction.
- (c) Déduire des résultats précédents que $f^n = Id$.

2°. On suppose dans cette question que $n = 4$. Dans la base (u_1, u_2) de E , on note $U = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ la matrice de f .

- (a) Calculer U^4 et en déduire que $b = 0$ et $a^2 = 1$.
- (b) Démontrer que $a = -1$.
- (c) Déterminer l'image du vecteur $\Omega = \sum_{i=1}^4 u_i$ par f et en déduire que $\Omega = 0$.