

ment matriciel est évidemment préjudiciable dans cette partie, d'esprit géométrique. Par ailleurs, faute de soin dans l'examen des domaines de définition des applications, beaucoup de candidats ne voient pas que $u^{-1} \circ u(x)$ n'est égal à x que pour x dans l'image de u . Enfin, les arguments de stabilité de sous-espaces, certes simples ici, sont rarement mentionnés.

La question I.C.1.a) adapte la construction de l'endomorphisme adjoint au cas d'une application linéaire entre deux espaces euclidiens ; les candidats ayant compris le cours affèrent y apportent des réponses satisfaisantes, les autres sont souvent vagues (les raisonnements matriciels utilisant la transposée ne sont probants qu'à condition de se placer explicitement dans des bases orthonormées), ou incomplets (preuve de la seule unicité). La question I.C.1.b) généralisation à la situation envisagée d'une propriété classique de l'adjoint, est assez souvent résolue ; certaines copies n'établissent cependant qu'une inclusion. La question I.C.1.c) est plus délicate : on peut la résoudre en inversant la restriction de f^* à l'image de f ou par l'emploi d'une base. La plupart des réponses produites suppose a priori la convergence de (z_k) . Notons à ce propos qu'une réponse partielle peut être assez largement payée à condition de se présenter comme telle ; en revanche, les fautes de raisonnement et les omissions plus ou moins délibérées d'arguments conduisant à penser que le candidat donne sa solution pour complète sont fortement sanctionnées. Dans l'ensemble I.C.1.d) et I.C.2 ne posent pas de problème. La question I.C.3 est immédiate pour qui se place dans une base de diagonalisation de $a^{-1} \circ f^* \circ f$ orthonormée pour ϕ_a , ce qui nécessite un certain recul ; elle n'est bien résolue que par une poignée de candidats.

La question II.A.1 demande de minorer $\langle a(x), x \rangle$ par $c\|x\|^2$ avec $c > 0$ et de majorer $|\langle b, x \rangle|$ par Cauchy-Schwarz. Beaucoup de candidats se montrent ici très peu à l'aise avec les inégalités, certains allant jusqu'à majorer J pour établir le résultat ! De nombreux autres ne savent pas traduire précisément la condition $J(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$. Le raisonnement très classique utilisé en II.A.2 est souvent mal compris ; il faut certes se restreindre à un compact, mais celui-ci doit être choisi avec un peu de soin (pour que J soit $> J(0) = 0$ hors de ce compact par exemple). Le calcul demandé en II.A.3 est souvent faux ou inachevé ; soulignons qu'il est aberrant de produire une expression de $J(x) + J(y) - 2J\left(\frac{x+y}{2}\right)$ ne s'annulant pas lorsque $x = y$. Celui de II.A.4.a) est

souvent inachevé (résultat non simplifié) ou mal présenté (il est judicieux de présenter le résultat comme trinôme en t). La question II.A.4.b), essentielle pour la suite peut se traiter par un argument de développement limité ou de façon algébrique. Beaucoup de candidats la comprennent en gros, mais peu établissent complètement l'équivalence ; en particulier, les notions de point critique, d'extremum local et d'extremum global sont rarement nettement distinguées. Certains remplacent subrepticement un $a/2$ issu d'un calcul incorrect par un a conduisant au bon résultat ; cette attitude appelle des commentaires analogues à ceux faits à propos de I.B.1.c) et est lourdement pénalisée. Quant à l'intermède géométrique II.A.5, il montre, hélas sans surprise, que peu de candidats prennent le temps de travailler le cours sur les quadriques.

L'implication non triviale de II.B.1 peut être établie directement ou avec un peu de calcul différentiel ; les réponses y sont souvent assez approximatives. En II.B.2, beaucoup de réponses sont incomplètes, l'utilisation des questions précédentes nécessitant ici un peu de soin.

La suite du problème, s'est révélée nettement moins révélatrice et il n'est pas utile de l'analyser plus précisément.

Conclusion

C'est un travail approfondi sur le cours (connaissance des théorèmes, de leurs démonstrations et applications immédiates) qui constituait sans aucun doute la meilleure préparation à cette épreuve, comme d'ailleurs à la plupart des sujets de concours. Conseillons donc aux candidats de travailler davantage dans ce sens, sans perdre de vue l'importance de la forme soulignée dans le second volet de ce rapport.

Sciences physiques

Physique

Présentation du sujet

Ce problème se propose de mettre en place quelques éléments de cosmologie. La première partie porte sur la déviation de la lumière par une étoile sur la base d'une analogie mécanique. L'instabilité d'un amas d'étoiles et la loi de Hubble permettent d'aborder progressivement des modèles d'évolution de l'Univers en dernière partie. De longueur raisonnable, ce sujet aborde des notions du cours de première et de seconde année.

Analyse globale des résultats

L'épreuve s'articule autour de quatre parties largement indépendantes. De nombreuses questions qualitatives ont permis de cerner le niveau de compréhension de la situation physique abordée. De ce fait, les très mauvaises copies sont relativement rares. Les bons candidats ont pu se démarquer en abordant les questions plus délicates du problème.

Les étudiants ont globalement fourni un sérieux effort de présentation, même si la qualité des explications et la rigueur des raisonnements, pourtant classiques, restent fréquemment problématiques. Si la précision peut aller de pair avec la concision, certains étudiants tombent dans le travers d'une copie rédigée en style télégraphique, ce que le jury sanctionne bien évidemment. Il est nécessaire de rappeler qu'une succession de relations mathématiques n'a jamais constitué une bonne démonstration, ni même une explication. Un minimum de rédaction est indispensable. C'est l'occasion pour l'étudiant de montrer qu'il a compris, au-delà de l'application directe d'une formule. C'est aussi l'occasion de montrer qu'il est capable d'exposer en des termes clairs des idées pas toujours simples, ce qui représente une des qualités attendues de tout futur ingénieur.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Partie I - Déviation de la lumière par les étoiles

Les premières questions abordent les éléments cinétiques d'un système à deux corps. Les théorèmes généraux de Koenig donnent une réponse immédiate. De nombreuses copies présentent pourtant des calculs lourds et maladroits. La réduction du système à deux corps, suggérée à la question I.A.3, est très peu utilisée. L'équation différentielle demandée est très souvent écrite en omettant le symbole de vecteur, ce qui la vide de tout sens. Cette erreur très répandue doit pousser les enseignants à la plus grande vigilance quant à un traitement vectoriel.

Dans le même contexte, les coordonnées du vecteur excentricité sont souvent écrites de manière fantaisiste. Si le théorème du moment cinétique est relativement bien connu, le plan de la trajectoire est rarement explicité. Dans la partie I.D, la conversion de radians en secondes d'arc représente une difficulté insurmontable pour de nombreux étudiants. Par ailleurs, une analyse dimensionnelle requiert un minimum d'explications précises. Une affirmation ne peut être considérée comme suffisante.

De nombreuses copies traitent les effets de lentilles gravitationnelles de manière satisfaisante pour la détermination de la distance focale à paramètre d'impact donné. Néanmoins, les valeurs numériques relèvent souvent de la démesure, dans un sens comme dans l'autre. Un peu de réflexion et de bon sens éviteraient des erreurs importantes, comme par exemple une distance focale de 15 mètres ce qui doit sans doute correspondre à une nano galaxie! Pour cette même application numérique, plus de trois étudiants sur quatre utilisent la relation approchée $\tan x \cong x$ avec des angles exprimés en degrés.

Partie II - Thermodynamique des étoiles et galaxies

La question de la stabilité d'un système mécanique simple a été très mal traitée dans l'ensemble. Les étudiants confondent presque systématiquement dérivées spatiales et temporelles. Les justifications deviennent alors totalement fantaisistes. La très forte proportion d'étudiants concernés montre à l'évidence que certains acquis de base ne sont pas opérationnels. Pour la question II.B.4, une analogie avec le modèle du gaz parfait pour introduire la température de l'amas d'étoiles était attendue. Ce fut très rarement le cas.

Partie III - Effet Doppler et Loi de Hubble

La formation en physique de nos étudiants repose sur une échelle de temps commune à tous les observateurs. Bon nombre d'entre eux proposent malgré cela à la question III.A.1. des relations violant l'invariance de la durée dans un changement de référentiel. Peut-être ont-ils redouté un piège, alors qu'il suffisait d'un minimum de bon sens. Par ailleurs, la relation $v_{\phi} v_g = c^2$, souvent évoquée, reliant les vitesses de phase et de groupe n'est pas de portée générale.

Les bons candidats ont, par contre, correctement exploité l'invariance de la phase d'une onde pour en tirer l'expression de base de l'effet Doppler-Fizeau. Les développements limités de la question III.A.5 n'ont été que très rarement menés à terme. Les expressions proposées s'arrêtent à l'ordre zéro, tandis qu'il fallait aller au premier ordre pour dégager la comparaison avec la relation mise en évidence en début de partie. De ce fait, la différence entre les traitements classique et relativiste n'a pratiquement jamais été abordée par les candidats.

Si la loi de Wien abordée en III.B a été souvent correctement traitée, très peu d'étudiants ont compris que l'étalement de la courbe de Planck rend délicate la détermination du décalage spectral. Les copies, citant l'existence de raies d'absorption pour contourner cette difficulté, se comptent malheureusement sur les doigts d'une main.

Partie IV - Échelle de temps de l'expansion

Les premières questions faciles de cette dernière partie permettent d'introduire rapidement la densité critique de l'Univers avant d'en étudier ensuite la dynamique. Le champ gravitationnel est une grandeur vectorielle. Sa norme ne suffit donc pas pour le définir. Le passage de la longueur d'onde à la fréquence dans la fonction de Planck se traduit très souvent par l'introduction d'un signe négatif pour une grandeur clairement positive. L'intégration sur une variable réduite n'a pas toujours bénéficié d'un traitement rigoureux. Comme l'énoncé ne citait pas la loi de Stefan pour la relation à établir en IV.C.2, les étudiants n'ont pas jugé utile de procéder à leur autocritique. L'exposant de la température était souvent erroné. Les dernières questions très guidées donnent un bon ordre de grandeur pour l'âge de l'Univers... du moins dans les excellentes copies.

Conclusion

Ce problème de difficulté très raisonnable a permis une bonne dispersion des notes. Trop de candidats présentent d'énormes lacunes sur des questions véritablement élémentaires. Une lecture attentive de l'énoncé leur aurait pourtant permis d'obtenir des points précieux en faisant preuve d'un minimum de réflexion physique. À l'opposé, le jury a vivement apprécié les très bonnes copies, très bien rédigées, qui ont fait le tour de la problématique dans le temps imparti.

Physique-Chimie

Présentation du sujet

Le sujet s'articule en trois parties indépendantes autour de la physique et la chimie des astres à travers trois thèmes principaux faisant appel, chacun, à une grande diversité de points du programme.

Partie I : l'étude de l'équilibre énergétique de Saturne utilisant un équilibre radiatif et thermique, un terme de dissipation analogue à la loi d'Ohm locale obtenue après un calcul de champ gravitationnel.

Partie II : la chimie de l'atmosphère de Titan balaye de l'équilibre thermodynamique de décomposition de l'ammoniac à son équilibre acide base en solution, en passant par la cinétique de la décomposition du méthane, la cristallographie de la glace et l'étude du diagramme binaire ammoniac/eau.

Partie III : modélisation mécanique des anneaux de Saturne.

Analyse globale des résultats

L'ensemble des parties a été abordé de manière assez homogène avec une réussite moyenne globale d'environ 30 %. La répartition des points acquis en physique et en chimie est équilibrée. La maîtrise du programme nécessaire à sa rapide mise en œuvre au cours de la succession des très divers thèmes du sujet a été très discriminante. La rédaction souhaitée par le jury n'est pas nécessairement très détaillée mais doit être précise et les résultats toujours justifiés sur la bases des mots clefs et théorèmes au programme. Une application numérique correspondant à une expression littérale fautive ne peut être validée ; il en est de même d'un commentaire si la relation ou la valeur numérique est inexacte. Compte tenu de la grande diversité des thèmes abordés, une très bonne note signe une bonne compréhension et maîtrise de l'ensemble des points abordés et une bonne maîtrise des techniques mathématiques utiles à la résolution complètes des parties.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Partie I - Bilan radiatif de Saturne

Partie traitée par la grande majorité des candidats, avec en général assez de succès.

I.A. Une application numérique fautive extrême (ρ de Saturne, Φ_0 du Soleil) peut être facilement détectée par le bon sens, mieux encore, par une évaluation « à la main » d'un ordre de grandeur.

Pour un commentaire de la valeur numérique de ρ , seules de pertinentes comparaisons se référant à des masses volumiques explicites (eau, matériaux, autres planètes etc) ont été acceptées par le jury.

La statique des fluides ne se réduit pas à la loi de Pascal et un bilan des forces sur une coquille sphérique ne peut mener au résultat I.A.3).

La loi de Stefan est bien maîtrisée par les candidats ; beaucoup des candidats qui souhaitent utiliser les angles solides dans l'expression de la puissance reçue par Saturne, ne les expriment pas correctement.

I.B. Bilan des forces souvent négligé d'où un oubli fréquent de la poussée d'Archimède, ce qui invalide l'essentiel des calculs de la partie.

L'analogie électromagnétique est souvent bien menée, ce qui aurait dû aider à l'orientation algébrique du terme de création au cours du bilan de puissance. L'intégrale sur le volume de la puissance dissipée est rarement bien posée et menée jusqu'au bout, bien que très valorisée par le jury si l'ensemble du raisonnement conduit jusqu'à la bonne valeur du coefficient γ .

Partie II - Chimie de l'atmosphère de Titan.

La plupart des candidats ont eu l'ouverture d'esprit d'effectuer un travail honnête de cette matière atteignant un niveau de culture qui a été récompensé.

II .A. Une faute d'application numérique sur les grandeurs thermodynamiques de la réaction est nécessairement lourde vis-à-vis des résultats (température d'inversion et coefficients de dissociation) qui en découlent. De nombreuses confusions entre quotient réactionnel et constante d'équilibre. Beaucoup de candidats s'efforcent de faire apparaître un polynôme de degré 2 en α^2 qu'ils résolvent à la main en posant de manière détaillée un calcul de discriminant : au XXI^{ème} siècle, le jury accepte une résolution numérique à l'aide de la calculatrice. Les justifications de déplacement d'équilibre doivent se faire sur la base des lois au programme. Les com-