PHYSIQUE II

Étude de quelques aspects du phénomène de résonance

Les quatre parties de ce problème sont largement indépendantes.

Partie I - Étude d'un circuit RLC

I.A - Résonance série

Le dipôle de la figure 1 (une bobine d'inductance L et de résistance R est montée en série avec un condensateur de capacité C), alimenté par une tension sinusoïdale

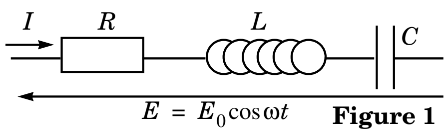


Figure 1

$$E = E_0 \cos\omega t$$

de pulsation ω variable, est parcouru par un courant

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi) .$$

I.A.1) Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_s}$ de ce dipôle.

I.A.2) En déduire l'impédance (réelle) Z_s de ce dipôle et le retard de phase φ du courant I sur la tension E en fonction de la pulsation propre

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et du facteur de qualité

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

de ce circuit.

I.A.3) Tracer le graphe du rapport

$$\frac{Z_s}{R}$$

en fonction du rapport

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} .$$

Filière TSI

I.A.4) Quelle est la valeur maximale $I_{0\mathrm{Max}}$ de l'amplitude I_0 du courant ? Pour quelle valeur de la pulsation est-elle atteinte ?

Tracer les graphes du rapport

$$\frac{I_0}{I_{0\mathrm{Max}}}$$

et de la phase φ en fonction de x.

I.A.5) L'acuité de la résonance est définie par le rapport

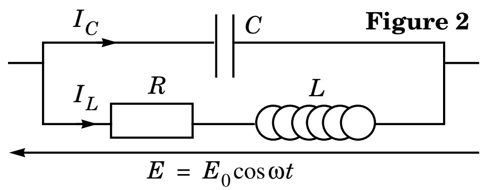
$$A = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \text{ où } \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \text{ (avec } \omega_2 > \omega_1 \text{)}$$

représente la bande de pulsations dans laquelle l'amplitude du courant vérifie

$$I_0(\omega) \geq \frac{I_{0\ \mathrm{Max}}}{\sqrt{2}} .$$

Déterminer A en fonction de Q. Dans quel domaine varie la phase φ pour $\omega \in [\omega_2, \omega_1]$?

I.B - Résonance parallèle



On considère maintenant le dipôle de la figure 2 (la bobine L, R est montée en dérivation avec le condensateur C), alimenté par la tension sinusoïdale $E = E_0 \cos\omega t$ de pulsation ω variable.

I.B.1) Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_P}$ de ce dipôle en fonction de R, L, C et ω.

I.B.2) En déduire l'expression Z_P en fonction de R, C, ω, Q, ω_0 et $\underline{Z_s}$ (Q, ω_0 et $\underline{Z_s}$ ayant été définis à la question précédente).

I.B.3) Montrer que, lorsque le facteur de qualité est très élevé $(Q \gg 1)$ et la pulsation ω pas trop faible

$$\left(Q \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1\right),$$

$\underline{Z_P}$ peut se mettre sous la forme approchée :

$$\underline{Z_P} \approx \frac{Q^2R^2}{\underline{Z_s}}.$$

On utilisera ce résultat dans toute la suite de la question I.B.

I.B.4) Quelle est la valeur de $\underline{Z_P}$ pour la pulsation ω_0 ? Quel est alors le comportement de ce circuit ?

I.B.5) On suppose $\omega = \omega_0$. Déterminer les valeurs approximatives des intensités réelles I_L et I_C qui traversent respectivement la bobine et le condensateur en fonction de R, Q, ω, du temps t et de l'amplitude E_0 de la tension d'alimentation du dipôle. Commenter les résultats obtenus.

Partie II - Étude d'un montage électronique

II.A - Dans le montage amplificateur de la figure 3, l'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire. Alimenté par une tension d'entrée V_E, il délivre une tension de sortie V_S.

Calculer le rapport $\frac{V_S}{V_E}$. Que vaut le courant d'entrée I_E ?

II.B - La figure 4 représente de manière symbolique l'amplificateur de tension équivalent au circuit de la figure 3. Déterminer le gain G (G est une constante réelle et positive), la résistance d'entrée R_E et la résistance de sortie R_S de cet amplificateur.

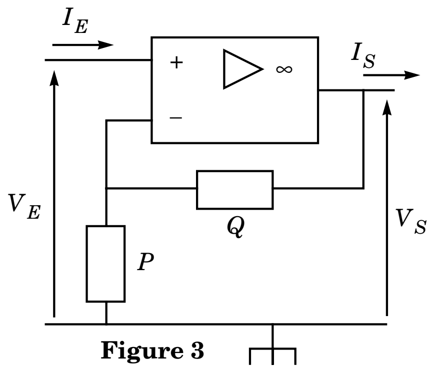


Figure 3

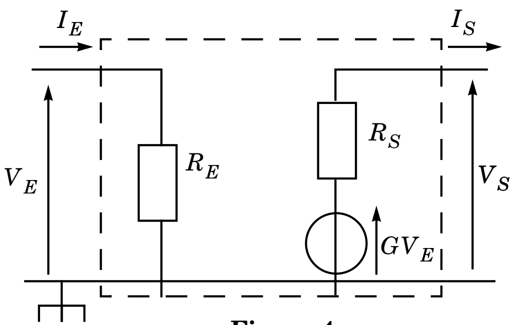
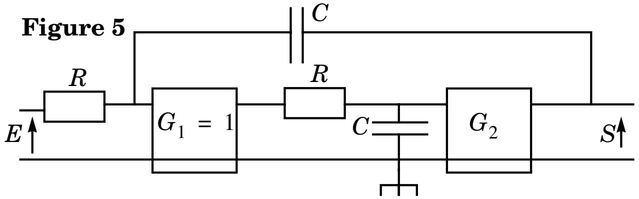


Figure 4

II.C - On considère le circuit de la figure 5 contenant deux amplificateurs de tension tels que celui représenté figure 4, l'un de gain $G_1 = 1$ et l'autre de gain G_2 légèrement inférieur à 2. On pose

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

Figure 5



II.C.1) Ce circuit est alimenté par une tension sinusoïdale $E = E_0 \cos \omega t$ de pulsation ω variable ; déterminer le rapport $\underline{H}$ entre les tensions complexes de sortie $\underline{S}$ et d'entrée $\underline{E}$:

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} \text{ en fonction de } G_2 \text{ et du rapport } x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

II.C.2) Calculer le module H de $\underline{H}$ en fonction de x. Déterminer en particulier la valeur maximale H_{Max} de H. Pour quelle valeur de la pulsation est-elle atteinte (ne pas oublier que G_2 est voisin de 2 tout en étant inférieur à 2) ? Calculer l'acuité de la résonance A en fonction de G_2 (A a été définie dans la partie I). Comment peut-on faire varier facilement cette acuité ?

II.C.3) Tracer le graphe de H en fonction de x.

II.C.4) On suppose $R = 100\ \mathrm{k\Omega}$, $C = 1\ \mu\mathrm{F}$, $G_2 = 1,8$. Le circuit est maintenant alimenté par une tension $E(t)$ rectangulaire périodique de période $T = 1\ \mathrm{ms}$, de rapport cyclique

$$a = \frac{T_1}{T} = 0,2$$

et d'amplitude

$$E_0 = 1\ \mathrm{V},$$

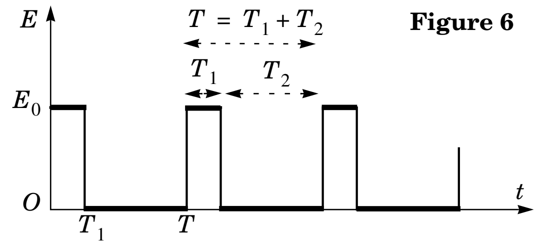


Figure 6

représentée figure 6. Déterminer la valeur de la tension de sortie S en régime établi, compte tenu des valeurs numériques.

Partie III - Oscillations d'une bobine dans un champ magnétique

Dans le référentiel ($Oxyz$: vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), supposé galiléen, une bobine $MNPQ$, plate, rigide, de forme carrée de côté a, constituée de N spires (d'un fil homogène de section négligeable) jointives, de résistance R, d'inductance négligeable, peut tourner autour de l'axe Oz sans frottement. L'axe Oz coïncide avec l'axe de symétrie de la bobine et on désigne par J le moment d'inertie de celle-ci par rapport à Oz. Cette bobine est plongée dans un champ magnétique radial $\vec{B}_0$, perpendiculaire à Oz, qui règne dans les entrefers formés par les pôles d'un aimant permanent et un noyau cylindrique intérieur en fer. Elle est reliée à un générateur de tension sinusoïdale $E = E_0 \cos\omega t$ et, en régime sinusoïdal établi, elle est parcourue par un courant sinusoïdal I ; sa position est repérée par l'angle $\theta = (\vec{e}_x, \vec{n})$, $\vec{n}$ désignant le vecteur unitaire normal à la bobine (figures 7 et 8).

Enfin, la bobine est soumise à l'action d'un ressort spiral qui exerce un couple de rappel $\vec{\Gamma} = -k\theta\vec{e}_z$. On supposera que la norme B_0 du champ $\vec{B}_0$ agit sur toute la longueur a des côtés opposés MN et PQ et est supposée constante dans le domaine de variation de θ.

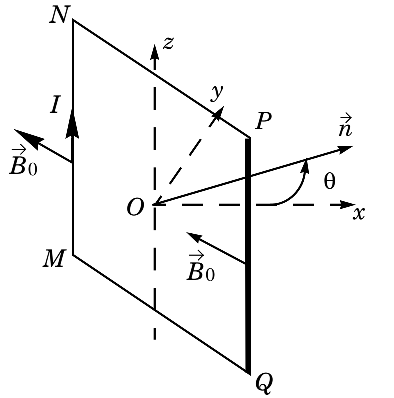


Figure 7 : l'aimant et le noyau ne sont pas représentés

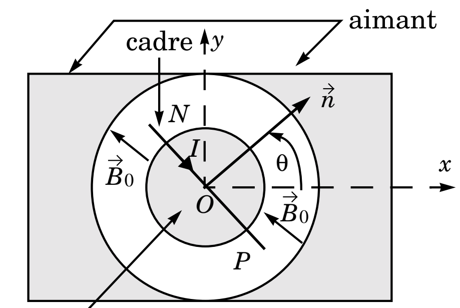


Figure 8 : vue de dessus

III.A - Quel est le moment des efforts de Laplace qui s'exercent sur le côté MN ? Sur le côté PQ ? En déduire celui qui s'exerce sur la bobine puis « l'équation différentielle mécanique » qui relie les variables θ et I.

III.B - Exprimer la force électromotrice d'induction induite par le mouvement de la bobine, puis écrire « l'équation différentielle électrique » qui relie les variables θ et I.

III.C - En déduire que l'équation différentielle à laquelle satisfait l'angle θ se met sous la forme :

$$J\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + k\theta = s\cos\omega t$$

et exprimer les coefficients constants h et s en fonction de la constante $\phi_0 = Na^2B_0$, de R et E_0.

III.D - On pose

$$\omega_0^2 = \frac{k}{J},\ 2\varepsilon\omega_0 = \frac{h}{J},\ D = \frac{s}{k} \text{ et on suppose } \varepsilon \ll 1 \text{ USI}.$$

En quelles unités se mesurent respectivement les coefficients ω_0, ε et D ? Justifier brièvement vos réponses.

III.E - En régime sinusoïdal établi, on cherche une solution de la forme

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

Exprimer l'amplitude θ_0 des oscillations en fonction de D, ε, ω_0 et ω. Comparer l'expression du rapport

$$\frac{\theta_0}{D} \text{ et celle de } H \text{ obtenue lors de la partie II.}$$

Quelle est l'expression du facteur correspondant au coefficient ε dans l'expression de H ?

III.F - Déterminer la valeur maximale $\theta_{0\,\mathrm{Max}}$ de l'amplitude θ_0 de l'oscillation de la bobine. Pour quelle valeur de la pulsation est-elle atteinte (ne pas oublier que $\varepsilon \ll 1$ USI) ? Déterminer également la valeur de l'acuité A de la résonance mécanique de la bobine.

III.G - Application numérique : on donne

$$\omega_0 = 1 \text{ USI},\ \varepsilon = 0,1 \text{ USI},\ D = 0,1 \text{ USI}.$$

III.G.1) Calculer $\theta_{0\,\mathrm{Max}}$.

III.G.2) Quel est le mouvement de la bobine lorsqu'elle est alimentée par une tension sinusoïdale de fréquence $f > 20$ Hz ? Pourquoi évoque-t-on ce domaine de fréquences ? Quel paramètre faudrait-il modifier si l'on souhaite que la bobine puisse détecter de manière significative un faible courant de fréquence $f = 100$ Hz ?

III.H - Quel intérêt peut présenter un montage électronique tel que celui de la figure 5 ?

Partie IV - Oscillations d'une tige

Sur une tige OA, *de masse négligeable* et de longueur a, est soudé à une distance $OM = b$ ($b < a$) un point matériel de masse m. Cette tige peut osciller sans frottement autour de l'axe Oz horizontal du référentiel ($Oxyz$: vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), et sa position est repérée par l'angle

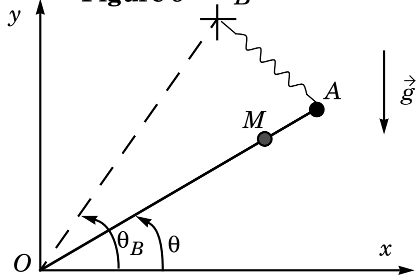
$$\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OA}) .$$

Un ressort relie l'extrémité A de la tige à un point B fixe dont la position est définie par la longueur $OB = a$ et l'angle constant

$$\theta_B = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OB}) ;$$

ce ressort exerce sur la tige en A une force $\vec{F}$ proportionnelle à sa longueur soit $\vec{F} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ (k désignant une constante positive). Enfin, l'air ambiant exerce sur la tige un couple de frottement fluide $\vec{\Gamma} = -h\dot{\theta}\,\vec{e}_z$ de faible intensité. L'accélération de la pesanteur vaut $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ (figure 9).

Figure 9



IV.A - Montrer que le moment cinétique de la tige OA dans le référentiel $(Oxyz)$ se met sous la forme :

$$\vec{L}_0 = \alpha m b^2 \dot{\theta}\, \vec{e}_z$$

et donner la valeur de la constante α.

IV.B - Le référentiel $(Oxyz)$ lié au sol est supposé galiléen.

IV.B.1) En appliquant le théorème du moment cinétique en O à la tige OA, dans le référentiel $(Oxyz)$, en projection sur l'axe Oz, déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait l'angle θ.

IV.B.2) Quelle est la position d'équilibre θ_E de la tige ? On souhaite que θ_E soit nul. Quelles conditions doivent vérifier les différents paramètres pour qu'il en soit ainsi ? *On supposera cette condition remplie dans toute la suite.*

IV.C - On suppose que le sol, et donc le référentiel $(Oxyz)$, est animé d'un mouvement de translation vertical et sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude y_0 soit :

$$y = y_0 \cos \omega t .$$

IV.C.1) Quelle est, dans le référentiel non galiléen $(Oxyz)$, l'expression de la force d'inertie d'entraînement qui s'exerce sur la tige OA ? Quelle est celle de son moment par rapport à O ? Quelles sont les expressions correspondantes relatives à la force d'inertie de Coriolis ?

IV.C.2) En appliquant le théorème du moment cinétique en O à la tige OA, dans le référentiel $(Oxyz)$, en projection sur l'axe Oz, déterminer la nouvelle équation différentielle à laquelle satisfait l'angle θ.

IV.C.3) On pose

$$\omega_0^2 = \frac{g}{b \tan \theta_B}, \quad 2\lambda\omega_0 = \frac{h}{mb^2} \quad \text{et on suppose } \lambda \ll 1 .$$

On suppose que θ reste petit et, en régime sinusoïdal établi, on cherche une solution de la forme $\theta = \theta_0 \cos(\omega t - \varphi)$. Exprimer l'amplitude θ_0 des oscillations en fonction de y_0, λ, ω_0, b et ω.

IV.C.4) Quelle est la valeur maximale $\theta_{0\,\mathrm{Max}}$ de l'amplitude θ_0 des oscillations ? Pour quelle valeur de la pulsation est-elle atteinte (ne pas oublier que $\lambda \ll 1$) ? Déterminer également la valeur de l'acuité A de la résonance.

IV.C.5) Tracer le graphe du rapport

$$\frac{b\theta_0}{y_0}$$

en fonction du rapport

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} .$$

IV.C.6) Quel peut être l'intérêt de ce dispositif ?

IV.C.7) Application numérique : on donne $b = 10\ \mathrm{cm}$, $\lambda = 0,1$. Le sol vibre à la fréquence $f = 0,1\ \mathrm{Hz}$ avec une amplitude $y_0 = 1\ \mathrm{mm}$. Quel paramètre peut-on facilement régler pour obtenir la résonance de la tige à la fréquence f de vibration du sol ? Donner la valeur numérique correspondante de ce paramètre. Calculer la valeur numérique de $\theta_{0\,\mathrm{Max}}$.

••• FIN •••