

Dans tout le problème, l'espace est rapporté à un repère orthonormal

$$\mathcal{R} = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

Les autres repères qu'on utilise ne sont pas nécessairement orthonormaux. **Ils ont tous la même origine o .** Les points sont désignés par des lettres minuscules. On note, avec une majuscule, M (ou M'), la matrice colonne des coordonnées du point m dans le repère \mathcal{R} (ou \mathcal{R}').

On note I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$ et tP la transposée de la matrice P . Si P est carrée, son déterminant est noté $\det(P)$. Si P ne comporte qu'un seul élément, cet unique élément est noté $\{P\}$.

Si S est une matrice symétrique appartenant à $M_3(\mathbb{R})$, on appelle surface associée à S dans le repère \mathcal{R} l'ensemble des points m tels que tMSM soit la matrice nulle.

Partie I - Quelques préliminaires

I.A - Exemple.

La matrice S est diagonale. Ses termes diagonaux sont 1, 1 et -1 .

On note x, y, z les coordonnées du point m dans \mathcal{R} .

I.A.1) Calculer le produit matriciel tMSM .

I.A.2) En déduire que $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ est une équation cartésienne de la surface \mathcal{S} associée à S dans le repère \mathcal{R} .

I.A.3) Quelle est la nature de \mathcal{S} ? Représenter la partie de \mathcal{S} comprise entre les plans d'équations $z = 0$ et $z = 1$.

I.B - Changement de repère

On revient au cas général. Soit \mathcal{S} la surface associée à la matrice symétrique S dans le repère \mathcal{R} .

I.B.1) En posant $S = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$, donner une équation cartésienne de \mathcal{S} dans le repère \mathcal{R} .

I.B.2) Soit $P \in M_3(\mathbb{R})$, P inversible, et soit \mathcal{R}' le repère tel que P soit la matrice de passage de la base de \mathcal{R} à la base de \mathcal{R}' . Soit M' la matrice des coordonnées du point m dans \mathcal{R}' . Exprimer M en fonction de P et de M' .

I.B.3) On pose $S' = {}^t P S P$; montrer que la matrice S' est symétrique.

Montrer que S' est inversible si et seulement si S est inversible.

I.B.4) Montrer que \mathcal{S} est l'ensemble des points m qui vérifient $\{{}^t M' S' M'\} = 0$.

I.C - Nature de \mathcal{S}

I.C.1)

a) Justifier que les racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ du polynôme caractéristique de S sont réelles et qu'on peut choisir la matrice P précédente orthogonale de sorte que S' soit diagonale. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

b) Écrire une équation de \mathcal{S} dans \mathcal{R}' .

I.C.2) On suppose S inversible.

a) Montrer que $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$).

b) On suppose que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ne sont pas tous de même signe. Montrer qu'on peut trouver un repère orthonormal \mathcal{R}' dans lequel \mathcal{S} admette une équation de la forme $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = z'^2$. Montrer que \mathcal{S} est un cône de sommet o .

c) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont de même signe.
- (ii) La surface \mathcal{S} est réduite au point o .

I.D - Inverse d'une matrice

On considère une matrice réelle ou complexe M , carrée de taille 3.

On appelle comatrice de M la matrice où figure, à la i -ème ligne, j -ème colonne, le déterminant, multiplié par $(-1)^{i+j}$, de la sous-matrice de M obtenue en barrant la i -ème ligne et la j -ème colonne. On note M' la transposée de la comatrice de M .

I.D.1) Montrer que $MM' = (\det(M))I$. On se bornera à calculer un terme diagonal et un terme non diagonal du produit MM' .

I.D.2) En supposant que M est inversible, exprimer M^{-1} en fonction de $\det(M)$ et de M' .

I.E - Calcul matriciel

Soient M_1 et M_2 deux matrices colonnes à trois éléments et $S \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

I.E.1) Montrer que $\{^tM_1SM_2\} = \{^tM_2SM_1\}$.

I.E.2) Posons $Q = {^tM_1SM_2}$ et $q = \{Q\}$. Si M_0 est une matrice colonne à trois éléments, vérifier que $M_0Q = qM_0$.

Partie II - Tangentes à une conique

Dans cette partie, S est une matrice symétrique, appartenant à $M_3(\mathbb{R})$, inversible et dont les valeurs propres ne sont pas toutes de même signe ; \mathcal{S} est la surface associée à S dans le repère \mathcal{R} .

Soit \mathcal{S}_1 l'intersection de \mathcal{S} et du plan d'équation $z = 1$ et soit m_0 un point de ce plan, n'appartenant pas à \mathcal{S}_1 .

On admet que \mathcal{S}_1 est une conique (ellipse, hyperbole ou parabole).

II.A -

Soit m un point non aligné avec o et m_0 . Soit μ un réel et p le point dont la matrice des coordonnées dans \mathcal{R} est $P = \mu M_0 + M$.

II.A.1) Montrer que, quel que soit μ , le point p est distinct de o et appartient au plan passant par o , m_0 et m .

II.A.2) Montrer que p appartient à \mathcal{S} si et seulement si μ vérifie une certaine équation du second degré dont le discriminant est

$$\Delta(M) = \{^tMSM_0\}^2 - \{^tM_0SM_0\}\{^tMSM\}.$$

On admet, **dans toute la suite du problème**, que, si le point m est dans le plan $z = 1$ et m est distinct de m_0 , alors la droite (m_0m) est tangente à la conique \mathcal{S}_1 si et seulement si $\Delta(M) = 0$.

II.B - On pose $T = SM_0{^tM_0S} - \{^tM_0SM_0\}S$.

II.B.1) Montrer que $\Delta(M)$ est l'unique terme de tMTM .

II.B.2) Montrer que la matrice T est symétrique. On note \mathcal{T} la surface qui lui est associée dans le repère \mathcal{R} .

II.B.3) Montrer que la droite om_0 est contenue dans \mathcal{T} .

II.C - Soit N une matrice unicolonne à 3 éléments.

II.C.1) Montrer que $TN = S.(\{^tM_0SN\}M_0 - \{^tM_0SM_0\}N)$.

II.C.2) En déduire que 0 est valeur propre de T et que le sous-espace propre associé est la droite dirigée par M_0 .

II.C.3) En déduire que T est de rang 2.

II.D -

II.D.1) En utilisant I.C.1), montrer qu'il existe un repère \mathcal{R}' dans lequel \mathcal{T} a une équation de la forme $\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2 = 0$, où les réels λ_1 et λ_2 sont non nuls.

II.D.2) En déduire que, suivant les signes de λ_1 et λ_2 , \mathcal{T} est formée de deux plans se coupant suivant la droite om_0 ou réduite à cette droite om_0 .

II.D.3) En déduire que le nombre de tangentes à \mathcal{S}_1 qui passent par m_0 est égal à 0 ou à 2.

Partie III - Utilisation de deux surfaces

Dans cette partie, on considère deux matrices A et B appartenant à $M_3(\mathbb{R})$. Ces matrices sont symétriques et inversibles ; elles ont chacune trois valeurs propres non de même signe.

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} les surfaces associées à A et B dans le repère \mathcal{R} .

On note \mathcal{A}_1 et \mathcal{B}_1 les intersections de \mathcal{A} et \mathcal{B} et du plan $z = 1$. Les courbes \mathcal{A}_1 et \mathcal{B}_1 sont donc des coniques. On suppose qu'on peut mener par tout point m_0 de \mathcal{B}_1 deux tangentes à \mathcal{A}_1 et que ces tangentes recoupent \mathcal{B}_1 en deux points m_1 et m_2 distincts de m_0 . On dira que m_0 a la propriété \mathcal{P} si et seulement si la droite m_1m_2 est tangente à \mathcal{A}_1 .

On fixe le point m_0 sur \mathcal{B}_1 .

III.A - Représenter, sur un même dessin, \mathcal{B}_1 , \mathcal{A}_1 et le triangle $m_0m_1m_2$. Pour simplifier le dessin, on supposera que \mathcal{B}_1 et \mathcal{A}_1 sont deux ellipses, \mathcal{A}_1 étant en entier à l'intérieur de \mathcal{B}_1 .

III.B - On utilise maintenant le repère \mathcal{R}' dont la base est $(\overrightarrow{om_0}, \overrightarrow{om_1}, \overrightarrow{om_2})$. Comme dans I.B.4), \mathcal{A} et \mathcal{B} sont associées dans le repère \mathcal{R}' à deux matrices A' et B' .

III.B.1) Écrire les matrices M'_0 , M'_1 et M'_2 des coordonnées de m_0 , m_1 et m_2 dans le repère \mathcal{R}' .

III.B.2) Montrer que B' est de la forme $B' = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$, avec a, b, c non nuls.

III.B.3) Montrer que A' est inversible. On pose $A' = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & t & u \\ z & u & v \end{bmatrix}$.

Déduire de I.D.2) le troisième terme diagonal de A'^{-1} .

Calculer aussi $\{{}^t M'_1 A' M'_0\}^2 - \{{}^t M'_0 A' M'_0\} \{{}^t M'_1 A' M'_1\}$.

III.B.4) Montrer, en utilisant II.A.2), que $xt - y^2 = 0$.

III.B.5) Justifier que A'^{-1} est de la forme $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & 0 & \delta \\ \gamma & \delta & 0 \end{bmatrix}$ et que m_0 a la propriété \mathcal{P} si et seulement si $\alpha = 0$.

Montrer que $\delta \neq 0$.

III.C - Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$.

On l'écrit sous la forme $M = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix}$ et on lui associe le polynôme

$P(x) = \det(xI - M)$; on note σ_1 et σ_2 les coefficients respectifs de x^2 et x dans $P(x)$.

Exprimer, en développant $P(x)$, σ_1 et σ_2 en fonction des termes de M .

III.D - Dorénavant, on prend $M = A'^{-1}B'$.

III.D.1) Calculer M .

III.D.2)

a) Écrire dans un langage de calcul formel une fonction qui prend en argument les scalaires $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ et qui retourne la valeur de $\frac{\sigma_1^2}{4} - \sigma_2$.

b) On a $\frac{\sigma_1^2}{4} - \sigma_2 = 2\alpha\delta ab$. En déduire que $\alpha = 0$ si et seulement si $\sigma_1^2 = 4\sigma_2$.

III.E -

III.E.1) Montrer que les matrices $A^{-1}B$ et $A'^{-1}B'$ sont semblables.

III.E.2) En déduire que $\sigma_1^2 - 4\sigma_2$ ne dépend pas du choix de m_0 sur \mathcal{B}_1 .

III.E.3) En déduire que s'il existe un point de \mathcal{B}_1 ayant la propriété \mathcal{P} , alors tous les points de \mathcal{B}_1 ont la propriété \mathcal{P} .

III.F - On pose $Q(x) = \det(xA - B)$.

III.F.1) Calculer $Q(x)$ en fonction de $\det(A)$ et de $P(x)$.

III.F.2) On note s et q les coefficients de x^2 et x dans $Q(x)$. Montrer que les points de \mathcal{B}_1 ont la propriété \mathcal{P} si et seulement si $s^2 = 4q\det(A)$.

Partie IV - Exemple d'application aux coniques

Dans un plan Π rapporté à un repère orthonormal, on considère deux courbes \mathcal{A}_1 et \mathcal{B}_1 d'équations respectives $x^2 - 4x + 3 + y^2 = 0$ et $y^2 - 2px = 0$, où p est un réel fixé positif.

IV.A - Préciser la nature de \mathcal{A}_1 et \mathcal{B}_1 .

Représenter \mathcal{A}_1 et \mathcal{B}_1 sur un même dessin, d'abord dans le cas $p = \frac{1}{2}$, puis dans le cas $p = \frac{1}{6}$.

Dans ce dernier cas, donner, par ses coordonnées, un exemple de point qui appartient à \mathcal{B}_1 tout en étant à l'intérieur de \mathcal{A}_1 .

IV.B - On plonge Π dans l'espace, de sorte que le point de coordonnées (x, y) de Π ait pour coordonnées $(x, y, 1)$ dans \mathcal{R} .

IV.B.1) Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux surfaces associées dans \mathcal{R} à deux matrices symétriques A et B .

Comment choisir ces deux matrices pour que ces surfaces coupent le plan $z = 1$ suivant les courbes \mathcal{A}_1 et \mathcal{B}_1 (utiliser I.B.1)) ?

IV.B.2) Montrer que A et B sont inversibles puis, en utilisant I.C.2)c) , que ni A ni B n'a trois valeurs propres de même signe.

IV.C -

IV.C.1)

Donner les coefficients s et q de x^2 et x dans le polynôme $Q(x) = \det(xA - B)$.

IV.C.2) Montrer que $\frac{1}{2}$ est la seule valeur de p telle que, par tout point m_0 de \mathcal{B}_1 , on puisse mener deux tangentes à \mathcal{A}_1 recoupant \mathcal{A}_1 en m_1 et m_2 tels que la droite m_1m_2 soit tangente à \mathcal{A}_1 .

IV.C.3) Avec cette valeur de p , représenter \mathcal{A}_1 , \mathcal{B}_1 et une position quelconque du triangle $m_0m_1m_2$.

• • • FIN • • •
