Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet porte exclusivement sur le programme d'algèbre linéaire. L'objectif est d'établir l'existence d'une décomposition de type « Jordan » pour des endomorphismes nilpotents d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel et d'en dégager quelques applications. Certaines sont classiques, comme la similitude de M, $M^\top$, $2M$, d'autres le sont moins, comme le lien avec le nombre de partitions d'un entier.

Un seul chapitre est exploré mais l'ensemble des connaissances du cours et des techniques de bases de première et deuxième année est évalué. Le sujet était très long, les meilleures candidats arrivent cependant à en faire correctement une grande partie.

Analyse globale des résultats

Les résultats sont assez décevants : même lorsque le cours est appris, la compréhension des notions abordées est très superficielle et les savoir-faire élémentaires peu acquis. Un gros tiers des candidats ne sait pas prouver qu'une famille est libre, confond scalaire, vecteur et application ($A^pX = \lambda^pX^p$!).

Beaucoup trop affirment que le complémentaire d'un espace vectoriel est un espace vectoriel, et que celui d'un noyau est l'image.

Plusieurs ont essayé d'utiliser des théorèmes hors programme (mal compris et inadaptés aux questions posées). Des candidats qui affirment systématiquement qu'un polynôme annulateur est forcément le polynôme caractéristique n'ont pas besoin d'invoquer le polynôme minimal ! En revanche la notion de matrice d'un endomorphisme dans une base donnée est assez bien comprise.

L'énoncé demande d'écrire quelques lignes de code Python. Seuls 2 % des copies proposent une bonne réponse.

Le sujet a permis de bien classer les candidats et les meilleurs d'entre eux, ceux qui savent construire des bases adaptées pour un espace vectoriel et qui justifient avec soin chaque affirmation, se sont nettement distingués.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Les candidats doivent avoir conscience que leur copie n'est pas notée au poids et qu'il est contre productif d'empiler des réponses partielles.

Les questions sont le plus souvent simples et le résultat à démontrer est parfois fourni par l'énoncé ; une réponse incomplète ne rapporte alors aucun point. Or il manque souvent une partie du travail demandé (existence, unicité, réciproque) ou des arguments indispensables. À titre d'exemple pour affirmer que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme ayant 0 pour seule valeur propre est X^n, il faut rappeler que ce polynôme est unitaire, de degré n et scindé sur le corps des nombres complexes.

Pour les questions plus délicates, les bonnes idées et les résultats partiels peuvent être valorisés s'ils ne sont pas accompagnés de contre vérité flagrante ou de malhonnêteté.

Une nouvelle fois nous rappelons l'importance de bien rédiger les démonstrations par récurrence. Un énoncé précis de la proposition que l'on souhaite démontrer est souvent indispensable. Dans la question **Q30**, la plus difficile du problème, la proposition doit pouvoir s'appliquer à tout endomorphisme (puisqu'on passera à l'induit) et à tout espace vectoriel (puisqu'on l'appliquera à un sous-espace).

Aucun résultat ne peut être donné sans justification, la mention « sans calcul » ne signifie pas « sans raisonnement ».

On ne saurait trop conseiller aux candidats de lire attentivement chaque question, d'en comprendre les hypothèses et les divers attendus et de prendre le temps d'y répondre avec soin en donnant toutes les justifications nécessaires.

Le vocabulaire doit être précis, les notations bien choisies pour avoir conscience à chaque instant de la nature des objets manipulés et éviter les confusions. Parler de la dimension d'une famille de vecteurs au lieu de son cardinal n'est pas une grosse erreur mais contribue à embrouiller les idées. En revanche, utiliser le terme « complémentaire » à la place de « supplémentaire » est une erreur grossière.

Le cours doit être vraiment maitrisé, connaitre la conclusion d'un théorème sans savoir en énoncer les hypothèses n'est pas exploitable.

Écrire lisiblement, avec une encre visible, sans faute d'orthographe, des phrases comportant un sujet un verbe et pas d'abréviation, est bien entendu apprécié.

Conclusion

Nous conseillons aux futurs candidats de consacrer du temps à la compréhension des chapitres d'algèbre, et de se limiter au programme, déjà bien consistant.