tester ce que l'on écrit sur un exemple numérique simple (par exemple $a = b = 1$). Les points 8 à 10 sont plus spécifiques au sujet de cette année.

Conclusion

Les correcteurs considèrent que la rédaction de la plupart des copies laisse beaucoup à désirer. Les futurs candidats doivent absolument faire des efforts particuliers en ce sens, et apprendre à rédiger de manière à la fois concise et précise. En effet, un raisonnement obscur, où certains arguments sont omis, mal compris ou même seulement imprécis, est toujours dévalorisé de façon significative par la notation. En outre, une rédaction claire des questions ou étapes intermédiaires d'un raisonnement aide les candidats eux-mêmes à mieux en comprendre le déroulement. Les correcteurs encouragent donc les élèves de classes préparatoires à progresser dans cette direction.

Mathématiques II

Présentation du sujet

Le sujet porte essentiellement sur l'algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n, avec une petite étude géométrique sur un exemple.

Au début, on démontre que AB et BA ont mêmes valeurs propres avec mêmes ordres de multiplicité. Ensuite on introduit la notion de valeurs singulières de A, racines carrées des valeurs propres de ${}^tAA$ et on montre que A et B ont mêmes valeurs singulières si, et seulement si, $A = RBS$ pour deux matrices orthogonales R et S. Puis on considère, pour $n = 3$, une matrice de rang 2 et on effectue une étude de l'image de la sphère unité (euclidienne) par l'endomorphisme associé. On considère ensuite les cas où le rang est 3 ou 1. Enfin, on étudie les propriétés du « pseudo-inverse », A^+, de A pour résoudre, « au mieux », $A\,X = Y$ et on demande de montrer que $Y - A\,X$ est de norme minimale pour $X = A^+\,Y$.

Analyse globale des résultats

Le sujet comporte des parties « faciles », découlant directement des définitions ou de théorèmes classiques du cours, notamment toute la première partie et le début de la seconde. Les notes sont donc, en moyenne, relativement élevées. Les parties III, IV et V sont, en revanche, plus difficiles et permettent de bien sélectionner les bons candidats (moins d'un sur cent a pu aborder l'ensemble du sujet). L'écart-type est donc important, environ le tiers de la moyenne ; ce qui permet à l'épreuve d'être « discriminante ». Les très bons candidats font preuve, tout à la fois de maîtrise du cours dans son ensemble et de compréhension des enjeux. Par contre nous avons aussi vu dans d'autres copies des fautes de raisonnement grossières et des erreurs portant sur des notions de base ; certains candidats n'hésitent pas à « inventer » des théorèmes (faux) qui donnent miraculeusement réponse à la question qu'ils ne savent résoudre.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Dans la première partie, les résultats découlent directement du cours. Notons que l'affirmation « $\det(AB) = \det(BA)$ par propriété du déterminant » dans de nombreuses copies est un peu succincte et que le correcteur aimerait que le candidat précise de quelle propriété il s'agit.

Ces questions ont été largement abordées par la plupart des candidats et plutôt bien traitées.

Rappelons cependant que, sur le corps des réels, les polynômes ne sont pas tous scindés ; par conséquent le déterminant n'est pas le produit des valeurs propres. Et c'est avec surprise qu'on trouve, pour A matrice carrée d'ordre n et X matrice colonne, des raisonnements du type :

$$« AX = 0 \iff \det(AX) = \det(A).\det(X) = 0 \iff \det(A) = 0 \text{ ou } \det(X) = 0 \iff A = 0 \text{ ou } X = 0 ».$$

La seconde partie utilisait le « théorème spectral » qui est très mal connu des candidats.

On ne trouve presque jamais le bon énoncé :

« Si A est symétrique réelle, elle est diagonalisable sur une base orthonormée ».

« Si A est symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale U telle que $UA{}^tU$ soit diagonale ».

On trouve souvent :

« Si A est symétrique réelle, elle est diagonalisable».

Ensuite se pose le problème de trouver une matrice de changement de bases conduisant à une base orthonormée, comme le demande l'énoncé.

Deux stratégies connaissent alors un certain succès :

- orthonormalisation de Gram-Schmidt (en général avec des orthographes fantaisistes), et, les candidats admettent alors, sans même se poser la question, que les vecteurs obtenus restent des vecteurs propres ;
- ou bien affirmation, a postériori, que toute base (ou bien la base) de vecteurs propres est orthonormée.

On voit aussi souvent : « Si A est symétrique réelle, elle est diagonalisable sur la base orthonormée formée de ses vecteurs propres»…

etc…

Notons aussi que, pour « passer » d'une base orthogonale à une base orthonormée, la plupart des candidats utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ce qui est tout-à-fait inutile.

Une erreur trop fréquente ; le théorème du rang ne s'écrit pas :

« $\dim \boldsymbol{M}_n(R) = \dim Ker\ A + rg\ A$ »

Toujours dans cette partie, une assertion séduit de nombreux candidats (une très large majorité d'entre eux, presque l'unanimité) et permet de résoudre facilement le II.B.4 :

« Si f est un endomorphisme de R^n : $Ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = R^n$ »

(éventuellement somme directe orthogonale, c'est plus pratique !).

C'est simple, sympathique, joli, voire esthétique… mais faux !

Des contre-exemples sont faciles à trouver :

Dans R^2 , on peut proposer : $f(i) = j$ et $f(j) = 0$; alors $Ker(f) = \mathrm{Im}(f)$

Les parties suivantes étaient plus « techniques ». Les candidats devaient montrer leurs capacités à mener un calcul maîtrisé. La fin, en V.E, n'a été traitée que par quelques excellents candidats.

À remarquer : la matrice d'un projecteur orthogonal (différent de l'identité) n'est pas une matrice orthogonale, bien que cela ait été « démontré » par de nombreux candidats.

Terminons par quelques conseils de bon sens mais qu'il n'est pas inutile de rappeler :

Attention à l'orthographe, très souvent lamentable, qui peut changer le sens d'une assertion. On voit souvent :

« AB et BA ont même valeur propre », « On a montrer », « Une base de vecteur propre », .etc…

On peut se demander quelle sera la crédibilité, voire la compréhensibilité des rapports de ces futurs ingénieurs !

Numéroter les pages ou les feuilles et écrire le numéro de la question traitée, par exemple II.A.3.a ; un a, tout seul, en haut d'une nouvelle feuille non numérotée, oblige le correcteur à faire une enquête minutieuse et fastidieuse.

On parle d'un ellipsoïde et non d'une ellipsoïde !

Le procédé d'orthonormalisation est dû à Gram et Schmidt et non à Gramm ou Gramme.

Le théorème spectral est un élément de la théorie spectrale mais on n'écrit pas « théorème spectrale »

Pour désigner la transposée de A, écrire ${}^{t}A$ et non t_A.

Conclusion

Le jury pense que ce sujet a bien rempli son rôle. L'écart-type est particulièrement important et les bonnes copies qui révèlent compréhension et connaissances obtiennent des notes en correspondance avec les qualités manifestées. Les très bonnes copies sont rares mais le problème permettait aux meilleurs candidats de se distinguer et d'exprimer leur potentiel.

Sciences physiques

Physique

Présentation du sujet

L'épreuve est constituée de trois parties très largement indépendantes qui s'articulent autour de la fusion thermonucléaire inertielle laser. La première partie étudie les instabilités hydrodynamiques, la seconde concerne l'origine des germes de ces instabilités, à savoir l'empreinte laser, il est enfin question de l'observation des phénomènes au sein du microballon.

La résolution globale nécessite d'avoir acquis de bonnes connaissances théoriques du programme de seconde année dans les domaines de la mécanique des fluides et de l'électromagnétisme. Il faut aussi avoir assimilé les applications pratiques de l'optique géométrique de première année concernant la formation des images.

Les compétences requises par cette épreuve vont au-delà de la compréhension et de la restitution des connaissances du programme. Il faut en particulier savoir illustrer les modèles théoriques étudiés par des phénomènes ou des observations courantes et connus de tous.