

## Mathématiques

### Mathématiques I

Le problème de cette année portait sur les équations différentielles. Il faisait découvrir aux candidats différentes notions de stabilité (typiquement la stabilité en norme  $L^1$  et en norme  $L^\infty$ ) pour des équations différentielles linéaires du second ordre avec amortissement évanescent.

Bien qu'il s'agisse d'un sujet assez délicat, l'énoncé était très progressif. Les deux premières parties (correspondant à plus de 50 % du barème) consistaient surtout en des questions assez classiques, notamment (mais pas uniquement) sur les équations différentielles – elles demandaient toutefois aux candidats une bonne compréhension des résultats du programme d'analyse.

Voici quelques points qui ont manifestement gêné une majorité de candidats, et sur lesquels il est souhaitable qu'ils s'améliorent :

- pour les équations du type  $y'' + ay' + by = \exp(ct)$ , il est souvent utile de se souvenir qu'il faut chercher des solutions particulières du type  $t \exp(ct)$  lorsque  $c$  est racine simple de l'équation caractéristique, et du type  $t^2 \exp(ct)$  lorsque  $c$  en est une racine double.
- faute de quoi, les candidats devraient se souvenir de la méthode de variation de la constante pour une équation du second ordre – ou, ce qui revient au même, pour un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre.
- la continuité des intégrales (question IIA) dépendant d'un paramètre est mal comprise par de trop nombreux candidats – notamment la condition de domination. De même, l'étude de la dérivabilité sous le signe somme dans la question IC n'a presque jamais été correctement traitée. Le jury tient à rappeler qu'une rédaction impeccable de ce type de question – pour lesquelles il suffit de bien connaître les résultats du cours – rapporte des points en quantité appréciable.
- dans les questions IIC1 et IVB, trop peu de candidats ont compris que l'annulation en un point de  $g = f + if'$  (où  $f$  est une solution réelle d'une équation différentielle linéaire résolue du second ordre) entraîne, grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, que  $f$  est alors identiquement nulle, ce qui permettait de se ramener au cas étudié par les questions IIB1-2.

### Mathématiques II

Le problème de Mathématiques II portait sur une étude des matrices carrées réelles, d'ordre 2, en liaison avec les opérateurs de  $\mathbb{R}^2$ , muni de sa norme euclidienne classique. Après un début faussement naïf - les matrices réelles  $(2,2)$  ! - il offrait une large transversale passant par :

- les espaces euclidiens (définition d'une forme bilinéaire symétrique *définie positive*) ;
- les opérateurs auto-adjoints - presque toutes les formulations du théorème spectral sont soit incomplètes, soit hautement fantaisistes ;
- la notion de norme subordonnée, de barycentre, de matrice orthogonale – et, dans leur presque totalité, les candidats ont affirmé que ces matrices sont toujours des matrices de rotation ;
- la notion de vecteur propre. Les matrices ne forment pas, contrairement à une croyance largement répandue chez les candidats, un anneau intègre ( $AM = AN \nRightarrow M = N$ ) ;
- des quadriques de  $\mathbb{R}^3$ , pompeusement qualifiées – par les rares candidats parvenus à cette question – d'hyperboloïdes, alors qu'il s'agissait de cônes de révolution ;
- Signalons aussi que le fait que l'équation d'une réunion de deux courbes d'équations respectives :  $f(x, y) = 0$  et  $g(x, y) = 0$  s'écrit  $f(x, y).g(x, y) = 0$  ;

Cela ne semble pas vraiment évident pour tous.

**La partie I** était constituée de généralités :

- définition d'un produit scalaire  $\langle M, N \rangle = \text{Tr}(M.N)$  ;
- inégalités portant sur  $\det(M)$  et  $\text{Tr}(M.N)$  ;
- décomposition de  $M$  sous la forme  $U.D.V$ , avec  $U$  et  $V$  orthogonales et  $D$  diagonale.

**La partie II** portait sur les matrices dont la norme subordonnée est inférieure ou égale à un. On y montre que toute matrice de la boule unité fermée, non orthogonale, appartient à un seul segment dont les extrémités sont des matrices orthogonales.

**La partie III** concerne le sous-ensemble de la boule unité (fermée) formé des matrices  $M$  telles que  $M.M^t M$  admette 1 comme valeur propre.

- On y montre que toute matrice appartient à une unique droite contenant deux matrices orthogonales, l'une de déterminant (+1), et l'autre de déterminant (-1) ;
- et que cette droite est alors incluse dans l'ensemble ici étudié.

Enfin, la **partie IV** illustre graphiquement l'appartenance de  $M$  :

- aux ensembles définis précédemment ;
- en particulier, l'intersection de ces ensembles avec l'espace des matrices symétriques (espace de dimension trois) conduit à des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ . En effet, toute matrice symétrique s'écrit :

$$M(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

et l'auteur propose l'étude des ensembles :

$$\{ (x, y, z) / M(x, y, z) \text{ appartient à l'ensemble étudié à la partie II [resp. III] } \}$$

La moyenne a été d'environ le quart des points alloués et un écart-type important (en fait sensiblement égal à la moitié de la moyenne) a permis de bien sélectionner les bons candidats car il a dégagé ceux qui faisaient preuve d'un esprit scientifique rigoureux et de bonnes connaissances mathématiques de base. Dans leur grande majorité, les candidats ont traité les parties I et II qui étaient tout à fait abordables pour les candidats qui connaissaient le cours. La partie III a aussi été (plus ou moins partiellement) traitée. La dernière partie n'a été vraiment abordée que par les très bons candidats.

Mais il est curieux de constater que des carences perdurent tant au niveau de la rédaction qu'au niveau du contenu. Certains affirment « n'importe quoi » ! Le but n'est pas d'établir un « bêtisier », mais d'attirer l'attention sur des erreurs trop fréquentes relatives à des connaissances qui devraient être acquises en PSI Aussi, au risque de ne pas être très original, le jury tient à renouveler quelques conseils très basiques, tant sur la présentation que sur les acquis scientifiques (il semble d'ailleurs qu'il y ait une certaine corrélation entre les deux !) :

- Il faut *numéroter les feuilles ou les pages*, il faut écrire *explicitement la question étudiée* : parfois, en haut d'une page ou feuille non numérotée, on trouve une question marquée b), après enquête laborieuse, il apparaît au correcteur qui n'apprécie pas du tout ce « jeu de piste », qu'il s'agit d'un « flash-back » et que la question est la IV. B. 2.b et non, comme on pourrait s'y attendre la II. C. 2. b ou la III. A. 2. b. La « devinette » n'amuse pas du tout le correcteur et révèle un manque de courtoisie certain de la part du candidat (l'émotion d'un jour de concours ... n'excuse pas tout !). Inutile de « délayer » : le jury ne « paie » pas au nombre de pages ! Chaque question est affectée d'un coefficient et, si elle peut être résolue en trois lignes, il est inutile de mettre trois pages.
- Lorsque l'énoncé demande si une assertion est vraie (ou fausse), la réponse attendue n'est pas : « *C'est vrai! (ou faux !)* ». Le nombre de points alloué à ce genre de réponse est, il faut en avoir conscience, *égal à zéro*. On attend :
  - une *démonstration* si la réponse est positive ;
  - un *contre exemple* si elle est négative.
- Ceci rejoint la notion de *conviction*. *Aucun point* n'est prévu pour la récompenser. Des affirmations du type : « Il est clair que... », « Il est évident que... », « On voit immédiatement que... », pour justifier une proposition qui *mérite d'être démontrée* se soldent par un *zéro*.
- Enfin, on doit parler du candidat qui propose au correcteur une « partie de pêche ». Il écrit tout ce qu'il connaît autour et alentour du sujet et conclut : « On peut donc en déduire que... », laissant au correcteur le soin de faire le tri, dans tout ce fatras, entre ce qui sert et ce qui n'a aucun rapport avec la question, puis de construire la preuve. C'est surestimer grandement le courage du jury qui attend qu'on lui apporte une démonstration achevée, cohérente où les arguments sont clairement étayés.

Plus particulièrement, dans le cadre de cette épreuve :

- La question I.B.1 a fort mal été traitée dans son ensemble. La *plupart (en fait, la presque totalité)* des candidats affirme : « Une fonction continue bornée de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  atteint son maximum ». Arc tan ne semble pas exister !
- La question II. E. 1 attire aussi l'attention. Il fallait montrer que, si  $M$  est de norme subordonnée majorée par 1 et s'il existe un vecteur  $X_0$  tel que  $\|M.X_0\| = \|X_0\|$ , alors  $X_0$  est vecteur propre de  $M$ . correspondant à la valeur propre 1. Voici le raisonnement de *presque tous les candidats* :

$$\|M.X_0\| = \|X_0\| \Rightarrow {}^tX_0.M.M.X_0 = {}^tX_0.X_0 \Rightarrow {}^tM.M.X_0 = .X_0$$

Donc alors  $X_0$  est vecteur propre correspondant à la valeur propre 1 !

- Le théorème spectral est aussi l'objet de variantes diverses (*en tout presque 100% des élèves !*) :
  - Pour certains, toute matrice réelle symétrique est diagonalisable, mais ils ne savent pas qu'il existe une *base orthonormée de vecteurs propres*. Cette méconnaissance rendait certaines questions infaisables ;
  - Pour d'autres, au contraire, le théorème est riche d'enseignements : toute matrice réelle symétrique est *diagonalisable en base orthonormée directe*. C'était bien pratique dans le cadre du problème ! Or, le programme officiel parle de *base orthonormée* et non de *base orthonormée directe*. Il fallait donc faire le passage de *base orthonormée* à *base orthonormée directe*. Ce n'est pas difficile, mais cela n'a pas été traité par un candidat sur cent (ou plutôt deux cents) ;
  - Il apparaît aussi que le polynôme caractéristique de toute matrice réelle symétrique est scindé à racines *simples (une copie*

*sur deux*). Que dire de la matrice unité ?

L'un des buts des épreuves de mathématiques, plus encore que de tester les connaissances, est de mettre en évidence « l'esprit scientifique » avec ses exigences de rigueur et de probité intellectuelle.

Ajoutons qu'il y a aussi de très bons candidats, qui ont dominé le sujet, tant au niveau des concepts que des calculs pas toujours évidents, et qui ont su exploiter leurs connaissances.

## Sciences physiques

### Physique

On trouvera entre parenthèses le pourcentage de bonnes réponses parmi l'ensemble des candidats suivi du pourcentage de bonnes réponses parmi le premier tiers des candidats classés par ordre de mérite.

- I.A.1. L'effet due à la force d'inertie d'entraînement est inclus dans  $g$  par définition (25%/60 %).  
Son absence a été « justifiée » par les raisons les plus fantaisistes (référentiel terrestre en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique annulant l'accélération d'entraînement ! Ou alors accélération d'entraînement incluse dans la dérivée particulière !).  
Les termes de l'équation (1) sont des forces volumiques (70 %/70 %)
- I.A.2. La statique d'un gaz isotherme n'est pas celle des liquides ! (40 %/70 %) Peu de candidats retrouvent ce résultat du cours.  
Les 2/3 des candidats, ayant écrit la décroissance exponentielle de la pression, reconnaissent dans l'exposant de cette exponentielle l'épaisseur caractéristique demandée.
- I.A.4. Expression du nombre de Rossby (60 %/90 %).
- I.A.5. Il fallait multiplier vectoriellement par  $e_z$  les 2 termes de l'équation (2) simplifiée et se souvenir de l'expression du double produit vectoriel (ou la posséder dans sa calculette) (10 %/25 %). Cette question aurait été plus raisonnablement sélective si l'énoncé avait rappelé cette expression du double produit vectoriel.
- I.A.6.  $v_y$  est une fonction paire de  $\lambda$  (5 %/15 %). Cette propriété de symétrie demandait d'ailleurs une justification.
- I.A.7. L'application numérique n'est réussie que par la moitié des candidats ayant établi l'expression littérale de  $v_y$ .
- I.B.1. La conservation du débit volumique se justifie par l'hypothèse de l'écoulement incompressible (22 %/25 %) et non par une recopie en vrac de toutes les hypothèses du problème ou par l'indication d'une hypothèse non présente : l'incompressibilité du fluide.  
L'élargissement de la section du tube de courant est la conséquence du ralentissement du vent derrière l'éolienne (60 %/75 %).
- I.B.2.,3. Comme par le passé, le jury a été très exigeant sur l'application des théorèmes de la physique à un système fermé suivi dans un régime stationnaire :  
- définition soignée du système fermé (50 %/90 %) ;  
- conséquences de l'hypothèse de stationnarité (40 %/70 %) ;  
- calcul soigneux des variations des grandeurs extensives associées (50%/80 %) ;  
- bilan soigneux des actions extérieures sans oublier la pression uniforme  $P_0$  sur une surface fermée (20 %/40 %).  
Rappelons avec force que les théorèmes d'Euler ou de Reynolds ne sont pas au programme et de ce fait ne peuvent être utilisés pour répondre à cette question !
- I.B.3. L'erreur d'énoncé ( $S_R$  au lieu de  $S_E$ ) n'a pas gêné outre mesure les candidats.  
Il fallait justifier que la résultante des forces pressantes sur la paroi latérale du système n'intervient pas (2 %/4 %)  
L'utilisation du théorème de Bernoulli (40 %/60 %) est à justifier à partir de la forme restreinte du théorème appliquée à une ligne de courant (20%/40 %).
- I.B.4. Un nombre non négligeable de candidats a trouvé le résultat (moyenne arithmétique des vitesses à l'entrée et la sortie) sans avoir répondu aux questions précédentes. Cela ne pouvait pas ramener de point.
- I.B.5. L'obstacle à l'écoulement (le rotor) fait apparaître une couche limite traduisant les effets de la viscosité(10 %/20 %).  
La confusion entre écoulement visqueux, écoulement turbulent et écoulement rotationnel est fréquente.