

Notations. Dans tout le problème, on ne considère que des matrices carrées réelles. On désigne par $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées (réelles) d'ordre 2, c'est-à-dire à 2 lignes et 2 colonnes. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{E}$, on rappelle la définition de sa *trace* $\text{Tr}(M) = a + d$ et de son *polynôme caractéristique*

$$\chi_M : x \in \mathbb{R} \longmapsto \det(x\mathbb{I}_2 - M),$$

où $\mathbb{I}_2$ désigne la matrice identité et $\det$ le déterminant d'ordre 2.

En outre, on identifie les espaces vectoriels réels $\mathbb{R}^2$ et $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et on munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée.

On pose donc, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

On rappelle enfin qu'une matrice carrée réelle A d'ordre 2 est *orthogonale* si, et seulement si, ${}^tA A = \mathbb{I}_2$. L'ensemble des matrices orthogonales réelles d'ordre 2 est noté O_2 .

On désigne par S_2 l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre 2.

Partie I - Généralités

I.A -

I.A.1) Démontrer que si deux matrices de $\mathbf{E}$ sont semblables, elles ont même trace et même polynôme caractéristique. La réciproque est-elle vraie ? Justifier la réponse.

I.A.2) Démontrer que $\Phi : (M_1, M_2) \longmapsto \text{Tr}({}^tM_1 M_2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{E}$. Pour la suite du problème, $\mathbf{E}$ pourra être muni de la norme associée à ce produit scalaire.

I.A.3) Démontrer que, pour toute matrice $M \in \mathbf{E}$, on a $|\det(M)| \leq \frac{1}{2} \text{Tr}({}^tMM)$. Quand y a-t-il égalité ?

I.A.4) Pour $M \in \mathbf{E}$ et $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\chi_M(x)$ en fonction de x , $\text{Tr}(M)$ et $\det(M)$.
En conclure que 1 est une valeur propre de M si, et seulement si, $\text{Tr}(M) = 1 + \det(M)$.

I.B - La décomposition UDV

On donne dans cette question $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ élément de $\mathbf{E}$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

I.B.1) Si $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et $\varphi(\theta) = \text{Tr}(MP(\theta))$.

Démontrer que φ est une application bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qu'il existe $\theta_1 \in \mathbb{R}$ en lequel φ atteint son maximum. En choisissant alors un tel θ_1 et en considérant $\varphi'(\theta_1)$, démontrer que $MP(\theta_1)$ est une matrice symétrique.

I.B.2) En déduire que $M \in \mathbf{E}$ peut se mettre sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et où D est une matrice diagonale de $\mathbf{E}$.

Remarque : on a établi que toute matrice $M \in \mathbf{E}$ peut se mettre sous la forme $M = UDV$, où D est diagonale et U, V orthogonales.

I.B.3) **Exemple :** décomposer la matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$.

I.C - Soit $A \in \mathbf{E}$, U et V des matrices orthogonales d'ordre 2 et $B = UAV$. Démontrer que tAA et tBB sont semblables.

On ne demande pas de démontrer le résultat suivant, qui est admis : toute matrice $M \in \mathbf{E}$ peut se mettre sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et où $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathbf{E}$ vérifie en outre $\alpha \leq \beta$ et $\beta \geq 0$.

Partie II - Les ensembles $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$

On désigne par $\mathcal{R}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathbf{E}$ telles que $\|MX\| \leq \|X\|$ pour tout vecteur-colonne $X \in \mathbb{R}^2$.

II.A - Reformuler la définition de $\mathcal{R}$ en utilisant la notion de *norme subordonnée*.

II.B -

II.B.1) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$, démontrer que (a, b, c, d) appartient $[-1, 1]^4$.

Démontrer que $\mathcal{R}$ est un compact de $\mathbf{E}$.

Si $(M_1, M_2) \in \mathbf{E}^2$, on définit le segment $[M_1 M_2]$ comme l'ensemble des matrices de la forme $(1-t)M_1 + tM_2$, où t décrit $[0, 1]$.

II.B.2) Démontrer que $\mathcal{R}$ est aussi un *convexe* de $\mathbf{E}$, c'est-à-dire que, si M_1 et M_2 sont deux matrices de $\mathcal{R}$, le segment $[M_1 M_2]$ est inclus dans $\mathcal{R}$.

II.C -

II.C.1) Démontrer que $M \in \mathcal{R} \iff \forall X \in \mathbb{R}^2, \quad {}^tX {}^tM M X \leq {}^tX X$.

II.C.2)

a) Si $M \in \mathbf{E}$, justifier le fait que le polynôme caractéristique de ${}^tM M$ est de la forme $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$, avec λ_1 et λ_2 réels.

Démontrer ensuite que ces réels sont positifs ou nuls.

On pourra considérer des expressions de la forme ${}^tX {}^tM M X$.

b) Démontrer que $M \in \mathcal{R}$ si, et seulement si, les valeurs propres de ${}^tM M$ appartiennent à $[0, 1]$.

II.D - Dédurre en particulier de **II.C.2.a** que

$$M \in \mathcal{R} \iff \begin{cases} \text{Tr}({}^tM M) & \leq 1 + (\det(M))^2 \\ \text{Tr}({}^tM M) & \leq 2 \end{cases}$$

II.E - On définit $\mathcal{S}$ comme :

$$\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{R} \mid \exists X_0 \in \mathbb{R}^2, X_0 \neq 0, \|MX_0\| = \|X_0\|\}.$$

II.E.1) En reprenant les calculs de **II.C.2.a**, démontrer que M appartient à $\mathcal{S}$ si, et seulement si, le polynôme caractéristique de ${}^tM M$ est de la forme $(x - \lambda)(x - 1)$, où $\lambda \in [0, 1]$.

II.E.2) Si $M \in \mathbf{E}$, on l'écrit sous la forme $M = P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et où $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \leq \beta$ et $\beta \geq 0$.

a) Déterminer les valeurs propres de ${}^tM M$ en fonction de α et β .

b) Démontrer que $M \in \mathcal{S}$ si, et seulement si, il existe U et V , matrices orthogonales d'ordre 2 et $\gamma \in [-1, 1]$ tels que $M = U \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V$.

II.E.3) En déduire que, si M est une matrice *non orthogonale* de $\mathcal{S}$, il existe des matrices orthogonales W et W' d'ordre 2 telles que M appartienne au segment $[WW']$.

On pourra montrer d'abord que si M est de la forme $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\gamma \in]-1, 1[$, on peut choisir W et W' orthogonales et diagonales telles que M appartienne au segment $[WW']$.

II.F - On désigne par $\mathbf{E}_1$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et par $\mathbf{E}_2$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$, avec $(c, d) \in \mathbb{R}^2$.

II.F.1) Démontrer que $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{E}$ orthogonaux au sens du produit scalaire Φ défini en **I.A.2**.

II.F.2) Démontrer que $\mathbf{E}_1$ contient toutes les matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant +1 et que $\mathbf{E}_2$ contient toutes les matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant -1.

II.F.3) Lorsque M est une matrice *non orthogonale* de $\mathcal{S}$, déduire de ce qui précède le nombre de segments $[WW']$ - où W et W' sont orthogonales - contenant M .

Partie III - Définition de l'ensemble $\mathcal{H}$

III.A -

III.A.1) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, démontrer que $M \in \mathcal{S}$ implique

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 + (ad - bc)^2$$

On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathbf{E}$ vérifiant cette dernière relation.

III.A.2)

a) Réciproquement, à quelle condition, vérifiée par son déterminant, une matrice $M \in \mathcal{H}$ appartient-elle à $\mathcal{S}$?

b) Démontrer qu'une matrice $M \in \mathcal{H}$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si $\text{Tr}({}^t M M) \leq 2$.

III.B -

III.B.1) Si $(A, B) \in \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$, calculer $\det(A + B)$ en fonction de $\det(A)$ et de $\det(B)$.

Si $(M_1, M_2) \in \mathbf{E}^2$, avec $M_1 \neq M_2$ on définit la *droite affine* $(M_1 M_2)$ comme l'ensemble des matrices de la forme $(1 - t)M_1 + tM_2$, où t décrit $\mathbb{R}$. Dans la suite, on l'appellera *droite* $(M_1 M_2)$.

III.B.2) Démontrer que, si W et W' sont des matrices orthogonales éléments de $\mathbf{E}$, telles que $\det(W) = +1$ et $\det(W') = -1$, la droite (WW') est incluse dans $\mathcal{H}$. Réciproquement, $\mathcal{H}$ est-elle réunion de droites de cette forme ?

Partie IV - Représentation graphique de $\mathcal{H}$

IV.A - Si $M \in \mathbf{E}$, on rappelle que le polynôme caractéristique de ${}^t M M$ est de la forme $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$, avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$. Pour fixer les idées, on suppose $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$.

On suppose $M \neq 0$. Déterminer en fonction de λ_1 et λ_2 le nombre de réels t **positifs** tels que $tM \in \mathcal{H}$. **On en trouvera « en général » deux, et on interprétera les cas particuliers.**

On étudie à partir de cette question l'intersection de $\mathcal{H}$ avec certains sous-espaces vectoriels de $\mathbf{E}$. On commence par des exemples de plans vectoriels.

IV.B - Soit $\mathbf{P}_1$ l'ensemble des matrices de la forme $\mathcal{M}_1(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{2}} & y \\ 0 & \frac{x}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

IV.B.1) Déterminer les matrices orthogonales qui sont dans $\mathbf{P}_1$.

IV.B.2) **Dans cette question, on identifie $\mathcal{M}_1(x, y)$ avec le point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et de son repère orthonormal canonique. On procédera à des identifications analogues dans les questions suivantes.**

a) Démontrer que $\mathcal{H} \cap \mathbf{P}_1$ est la réunion de deux coniques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
Déterminer $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

b) Représenter par un dessin $\mathcal{H} \cap \mathbf{P}_1$ et $\mathcal{S} \cap \mathbf{P}_1$ dans le plan $\mathbf{P}_1$.

IV.C - Soit $\mathbf{P}_2$ l'ensemble des matrices de la forme $\mathcal{M}_2(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{2}} & \frac{x}{\sqrt{2}} \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Soit

$(u, v) \in \mathbb{R}^2$; on ne demande pas de vérifier que la relation du **III.A.1** implique

$$\mathcal{M}_2(x, y) \in \mathcal{H} \cap \mathbf{P}_2 \iff x^2 y^2 - 2(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

Étudier et représenter par un dessin $\mathcal{H} \cap \mathbf{P}_2$ et $\mathcal{S} \cap \mathbf{P}_2$ dans le plan $\mathbf{P}_2$ (on pourra discuter et résoudre l'équation par rapport à la variable y).

IV.D - Exemple d'intersection de $\mathcal{H}$ avec un sous-espace de dimension 3

On désigne par $\mathbf{S}_2$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre 2.

IV.D.1) Démontrer qu'une matrice $M \in \mathbf{S}_2$ appartient à $\mathcal{H}$ si, et seulement si, elle admet une valeur propre égale à $+1$ ou à -1 .

On admet qu'une base orthonormale de $\mathbf{S}_2$ est $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3)$, avec

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.D.2) En écrivant une matrice de $\mathbf{S}_2$ sous la forme $xM_1 + yM_2 + zM_3$, décrire l'ensemble C_a des matrices de $\mathbf{S}_2$ admettant le réel donné a comme valeur propre. En déduire une description de $\mathcal{H} \cap \mathbf{S}_2$.

IV.D.3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $N = P(\theta)M(x, y, z)P(\theta)^{-1}$; démontrer que c'est une matrice de la forme $M(u, v, w)$ et exprimer (u, v, w) en fonction de (x, y, z) . Interpréter certains des résultats de la question **IV.D.2**.

IV.D.4) Représenter par un dessin $\mathcal{H} \cap \mathbf{S}_2$ et $\mathcal{S} \cap \mathbf{S}_2$.

••• FIN •••
