Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet porte sur un thème assez classique de l'analyse numérique, l'approximation d'une mesure par des évaluations en des points d'un intervalle, ainsi que le test sur les polynômes. On y voit apparaitre les polynômes d'interpolation de Lagrange et les polynômes de Tchebychev. Il y est beaucoup fait appel à l'algèbre linéaire sur l'espace des fonctions numériques continues sur un intervalle. Les séries entières sont aussi un thème important. Les méthodes sont souvent élémentaires et beaucoup de questions peuvent être traitées avec les connaissances de première année.

Analyse globale des résultats

Sur un sujet relativement long, les nombreux exemples d'applications numériques ont permis aux candidats les moins assurés de s'exprimer et mettre en valeur certaines de leurs compétences.

Il est clair toutefois que l'analyse pose globalement beaucoup de difficultés. Ainsi les candidats peinent à justifier la convergence d'intégrale et se montrent souvent fort maladroits quant à l'utilisation des propriétés des séries entières ou les formules de Taylor. De trop nombreux candidats ont aussi eu du mal à traiter les premières questions et à proposer des illustrations graphiques pertinentes.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Dans ce qui suit nous commentons le traitement des questions en omettant les moins abordées.

I Généralités sur les formules de quadrature

I.A - Exemples élémentaires

Une part surprenante des candidats n'a pas compris et donc pas su entrer dans cette partie. Il semble que les candidats n'aient pas toujours vu ce qu'on attendait d'eux en demandant une illustration graphique.

Ensuite, beaucoup n'ont pas saisi les incitations de l'énoncé à utiliser les propriétés de linéarité de l'opérateur e et à travailler avec la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$.

Q1. Les tracés graphiques de cette question et la suivante, censés faciliter la compréhension du sujet, ont trop rarement été satisfaisants.

Q2. Des graphiques bien souvent illisibles (seulement un repère ou une simple droite) et des explications parfois confuses.

Q3. Plutôt bien traitée, mais la notion d'*ordre* d'une formule de quadrature, introduite par l'énoncé, est mal comprise.

I.B - Construction de formules d'ordre quelconque

La structure vectorielle de $\mathbb{R}[X]$ est largement sous-exploitée malgré les rappels de l'énoncé. Le plus souvent, les candidats considèrent le polynôme dans sa forme la plus générale sans recourir à la base canonique par exemple.

Dans **Q5** et **Q6**, les candidats auraient gagné à utiliser le fait que φ est un isomorphisme.

Q4. Parmi les erreurs fréquentes : « une application linéaire injective en dimension finie est bijective ».

Q5. Confusion entre unicité et existence.

Cela réapparait lors de la considération des polynômes de Lagrange (existence, unicité et indépendance). Par ailleurs certains candidats démontrent l'unicité sans l'existence et vice-versa.

Q6. Trop de candidats affirment à tort que les L_i sont échelonnés. À noter que l'appartenance de P à $\mathbb{R}_n[X]$ n'implique pas que P soit de degré n.

Q7. La plupart des candidats ont proposé de démontrer l'implication et la réciproque. La rédaction est souvent longue, confuse et inutilement compliquée, les candidats en venant à écrire apparemment de bonne foi qu'une somme est nulle si et seulement si ses termes sont nuls.

Les candidats auraient dû penser à utiliser la base des L_i et la linéarité de l'erreur e sous la forme $e(f) = 0 \iff e(L_i) = 0$ pour tout i.

Q8. Une question abordée par un candidat sur deux et plutôt bien traitée, un quart des candidats la traitant de façon complète.

I.C - Noyau de Peano et évaluation de l'erreur

C'est ici que commencent les difficultés ; cette partie a été assez mal traitée.

Q9. La formule de Taylor avec reste intégral, pourtant très sollicitée ces dernières années dans nos sujets, est trop rarement correcte. L'intérêt de la fonction φ n'est ici pas vraiment compris, la linéarité de e encore une fois oubliée.

Q10. Pas de difficulté pour de nombreuses copies.

I.D - Exemple : méthode des trapèzes

Q11. Des erreurs, faute de comprendre φ_1. Des majorations trop brutales sur K_1.

Q12. Des graphiques corrects mais bien souvent une absence d'explication : pas de hachures, pas de bornes a et b.

Q13. Une simple application de la relation de Chasles qui a posé des difficultés inattendues.

Q14. Une autre conséquence facile de ce qui précède mais finalement peu traitée.

II Polynômes orthogonaux et applications

II.A - Étude d'un produit scalaire

Cette partie pose essentiellement une question d'algèbre qui a été plutôt bien traitée.

Q15. Les arguments de comparaison d'intégrales de fonctions positives et d'intégrale absolument convergentes ne sont presque jamais évoqués.

L'inégalité $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ n'est souvent démontrée que partiellement.

Q16. La notion de sous-espace vectoriel est à nouveau souvent oubliée et on lit parfois que E est « inclus » dans $\mathbb{R}$.

Q17. Assez bien traitée mais oubli fréquent de la continuité pour prouver le caractère défini.

II.B - Polynômes orthogonaux associés à un poids

Q18. Question très sélective. De nombreux candidats qui l'ont abordée ont supposé que p_n était scindé dans I. Mais quelques tentatives intéressantes.

II.C – Applications : méthodes de quadrature de Gauss

Q19. Quelques tentatives mais peu de réussite.

II.D - Exemple 1

Q21. Les calculs ont souvent été menés à bien avec succès.

II.E - Exemple 2

Cette partie rebute vite la plupart de ceux qui l'abordent et qui essayent ensuite de prendre des points faciles dans le reste du problème.

Q23. Question classique mais très mal traitée, la faute à un manque de rigueur préoccupant. Certains candidats utilisent des majorations peu crédibles « $x^k w(x) < x^k$ », ou l'argument « la fonction est continue sur $]-1,1[$ donc l'intégrale converge ».

Q24. Une question difficile puisque la relation de récurrence des polynômes de Tchebychev n'est pas donnée.

Q25 à **Q27**. Seuls les rares candidats ayant trouvé la relation ont pu aborder ces questions.

III Accélération de la méthode des trapèzes

Les propriétés des séries entières sont parfois mal assimilées. De nombreux candidats ont voulu appliquer le critère de d'Alembert. Le manque de temps peut aussi expliquer la précipitation et les erreurs.

III.A – Nombres b_m et polynômes B_m

Q28. Une question souvent abordée mais faussement facile puisqu'elle ne concerne pas que le comportement de la suite à l'infini, une majoration globale étant demandée.

Q29. Les conditions d'application du produit de Cauchy paraissent connues mais de nombreuses erreurs sont commises dans son utilisation. La récurrence forte nécessaire ensuite est trop rarement complète.

Q30. Un certain nombre de candidats (20 %) abordent cette question et les deux suivantes, mais le taux d'échec est élevé, peut-être par manque de temps. Pour la question présente, on note une certaine confusion après que la développabilité a été admise auparavant.

Q31. Rares sont les copies qui considèrent effectivement pour S le prolongement naturel à $\mathbb{C}$ de $z \mapsto \frac{e^z-1}{z}$.

Q32. Un peu mieux réussie que la précédente.

Q33. Un calcul facile souvent traité indépendamment du reste par des candidats attentifs.

Q34. Cette question est très rarement traitée. La presque parité de la fonction étudiée s'avère mal comprise.

Q35. Comme en **Q33**, une occasion de calcul que beaucoup de candidats cherchent à saisir mais sans toujours voir que cette fois on demande des polynômes.

Q36. La dernière question abordée par une portion notable des candidats et avec un certain succès.

III.B – Développement asymptotique de l'erreur dans la méthode des trapèzes

Partie très peu abordée.

Conclusion

Les polynômes de Lagrange semblent connus sous une forme ou une autre par de nombreux candidats. De façon générale, les méthodes algébriques sont utilisées avec une certaine efficacité. De même les calculs demandés, certes simples, ont été satisfaisants. Mais le domaine le plus faible s'avère finalement l'analyse elle-même où un classique comme la formule de Taylor avec reste intégral demeure mal maitrisé et où une discussion d'intégrales impropres devient périlleuse dès lors que les bornes ne sont ni 0 ni $+\infty$.

C'est donc finalement en algèbre qu'on voit les raisonnements les plus complets et qu'on peut même noter un effort réel de rédaction et de justification. Par ailleurs, les défauts de présentation nous ont paru moins fréquents qu'auparavant, et le malus prévu à cet effet (qui peut aller jusqu'à 10 %) a été peu utilisé par les correcteurs.