

# Mathématiques 2

## Présentation du sujet

Le sujet est constitué de trois parties indépendantes dont le fil conducteur est la fonction zêta de Riemann. La partie I est consacrée à l'étude de cette fonction, la partie II considère une série de fonctions dont le développement en série entière possède des coefficients qui s'expriment à l'aide de la fonction zêta, et la partie III utilise une loi de probabilité reliée à la fonction zêta pour établir des résultats mêlant les probabilités et l'arithmétique.

Le sujet permet de tester les connaissances des candidats sur de nombreux points en analyse (théorèmes d'encadrement pour les limites, comparaison série-intégrale, séries de fonctions, séries entières, intégrales généralisées) et sur les probabilités (probabilité sur  $\mathbb{N}$ , variable aléatoire discrète, espérance, variance, événements mutuellement indépendants).

## Analyse globale des résultats

Une grande majorité de candidats a plutôt bien traité la partie I qui est classique et accessible, et dans une moindre mesure la sous-partie III.A qui traite de notions de base des probabilités.

La différence s'est souvent faite sur la partie II qui nécessite une bonne approche intuitive pour la sous-partie II.B (télescopes de termes dans des séries et obtention d'équivalents, les deux à savoir confirmer par des justifications suffisamment convaincantes) ainsi qu'une bonne connaissance et maîtrise des principales notions d'analyse au programme et des théorèmes qui s'y rapportent pour ses autres sous-parties.

Les sous-parties III.B et III.C ont été aussi assez discriminantes dans la mesure où des notions ou propriétés plus délicates de probabilités interviennent comme l'indépendance mutuelle ou le résultat de continuité décroissante des probabilités. La sous-partie III.D est assez peu traitée.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

### I Fonction zêta

**Q2.** Question plutôt bien traitée dans l'ensemble car très classique. Les quelques rares candidats disant que  $f$  est continue comme somme de fonctions continues ont été sévèrement sanctionnés.

**Q3.** Certains dérivent la série de fonctions au lieu d'utiliser la décroissance de chacune des fonctions, la plupart sans énoncer et vérifier correctement les hypothèses, certains même dérivent par rapport à  $n$ . D'autres candidats pensent que considérer le signe de  $f(x+1) - f(x)$  suffit pour étudier les variations de  $f$ .

**Q4.** Quelques rares candidats montrent que leurs connaissances sont très superficielles et confondent le fait que la somme de la série de fonctions admet une limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$  avec le fait que la série converge.

**Q5. et Q6.** Questions très classiques de comparaison série-intégrale où certains candidats se sont contentés d'une figure explicative pour la question 5. Le jury a été attentif entre autres à l'évocation des problèmes de convergence (des intégrales et de la série).

**Q7.** et **Q8.** Ces questions faciles utilisant les théorèmes d'encadrement pour les limites ont été plus ou moins bien rédigées. Attention aux rédactions qui font croire que le candidat pense qu'une limite existe forcément.

**Q9.** Les candidats se doivent de soigner suffisamment les tracés en plaçant notamment les deux asymptotes.

## II Étude d'une fonction définie par une somme

**Q10.** La plupart des candidats justifient assez bien la convergence de la série. Une bonne partie d'entre eux n'obtiennent cependant pas le bon ensemble de définition, beaucoup se plaçant sur  $] -1, +\infty[$ .

**Q11.** Les candidats ayant le souci de prouver la convergence uniforme de la série de fonctions ont plus de difficultés qu'en question 1 pour établir une majoration uniforme correcte du terme général de la série. Certains candidats dérivent encore la série de fonctions. La plupart parlent de décroissance sur  $Df$  et non pas sur tout intervalle de  $Df$ .

**Q12.–Q15.** Certains candidats trouvent de bonnes réponses mais ont des difficultés pour les justifier correctement. Quelques candidats écrivent à un moment donné des séries manifestement divergentes (du type série harmonique), ce qui est sévèrement sanctionné.

**Q16.** La plupart des candidats trouvent bien un rayon de convergence valant 1 (quelques-uns trouvent un rayon infini ou d'autres même  $-1$ ) mais en utilisant des justifications plus ou moins convaincantes. Nous rappelons que la version série entière du critère de D'Alembert n'est pas au programme. Certains voulant absolument utiliser le critère spécial des séries alternées pensent pouvoir montrer la convergence de la série entière pour  $x = 1$  alors que son terme général ne tend pas vers 0 d'après la partie I.

**Q17.** Question permettant de vérifier à nouveau que les candidats connaissent les hypothèses des principaux théorèmes sur les séries de fonctions et qu'ils savent justifier la convergence uniforme à l'aide d'une majoration.

**Q18.** La plupart des candidats ayant abordé cette question obtiennent un  $A$  qui dépend de  $k$  et de  $x$ , ce qui met en évidence une mauvaise compréhension du rôle des quantificateurs. Certains croient voir une série alternée (en confondant  $k$  et  $n$ ) en vue d'utiliser une majoration classique du reste en valeur absolue.

**Q19.** Le fait que la fonction soit développable en série entière donne souvent lieu à des justifications farfelues (par exemple, si la série de Taylor de  $f$  converge, alors  $f$  est développable en série entière). Le jury a apprécié l'honnêteté des candidats qui ont admis ce résultat pour en déduire l'expression demandée de  $f(x)$ .

**Q20.** Question ayant posé beaucoup de difficulté alors qu'il s'agit d'une question relativement classique sur la convergence des intégrales impropres (comparaison à une intégrale de Riemann en 0 et prolongement par continuité en 1).

**Q21.** Peu de candidats ont correctement justifié l'interversion série-intégrale (il fallait utiliser la version de ce résultat pour un intervalle quelconque et non pas celle utilisant la convergence uniforme sur un segment), le calcul de l'interversion ayant été fait par un plus grand nombre.

**Q22.** Certains candidats utilisent le résultat d'unicité du développement en série entière de façon inappropriée en comparant une série entière avec une série numérique.

**Q23.** Le jury attendait dans cette question les justifications habituelles lors d'un changement de variable dans une intégrale : bijection strictement monotone de classe  $C^1$ .

### III Probabilités

**Q24.** Question facile où quelques candidats ont montré de grandes maladresses (certains allant même jusqu'à écrire des énormités) dans le calcul avec des sommes et des quotients pour montrer le résultat de normalisation d'une probabilité.

**Q25.** Les candidats ayant évoqué seulement la convergence de la série représentant l'espérance et non la convergence absolue ou la positivité des termes de la série ont été légèrement sanctionnés.

**Q26.** Le jury attendait l'utilisation explicite du théorème de transfert. Certains candidats en ont donné une version très personnelle.

**Q28.** Les candidats ayant détaillé leur raisonnement ont été favorisés (utilisation d'un système complet d'événements ou réunion d'événements deux à deux incompatibles). Malheureusement, certains d'entre eux ont évoqué par confusion la notion d'indépendance.

**Q29.** La définition exacte de l'indépendance mutuelle est assez largement ignorée. Beaucoup trop de candidats considèrent l'intersection globale sans prendre une sous-famille quelconque et il semble que certains candidats croient que l'indépendance deux à deux suffit.

**Q30. et Q31.** Questions traitées par un peu plus de la moitié des candidats, mais rarement bien rédigées. Le jury a porté son attention sur la rigueur des raisonnements lors notamment de l'utilisation effective du résultat de continuité décroissante des probabilités et de la justification suffisamment détaillée de l'indépendance mutuelle des événements pour pouvoir passer au produit des probabilités.

**Q32.–Q35.** Les dernières questions ont été assez peu traitées.

### Conclusion

Ce sujet valorise le travail sérieux sur le cours que certains candidats ont effectué tout au long de leur préparation. En effet, de nombreux thèmes sont abordés ainsi qu'un nombre relativement important de questions classiques.

Nous constatons malheureusement que le cours n'est que trop souvent partiellement maîtrisé, en particulier en ce qui concerne les définitions et les grands théorèmes classiques. Nous observons aussi des maladresses pour le calcul. Par exemple, de trop nombreux candidats ont des difficultés à majorer et à minorer les fractions pour obtenir une convergence normale (**Q11.** et **Q17.**).

Nous conseillons aux candidats d'effectuer un travail régulier consistant à apprendre le cours et à le comprendre dans toutes ses nuances. De plus, la recherche d'exercices de difficultés progressives est incontournable pour l'assimilation du cours, pour la maîtrise de l'art du raisonnement et des techniques classiques de calcul.

Rappelons que la présentation et la rédaction sont évaluées par les correcteurs. Il est indispensable de rédiger de manière à la fois claire et précise, sans utiliser de façon trop systématique des abréviations, ce qui rend parfois certaines copies peu lisibles. Les résultats doivent être mis en évidence, en étant par exemple encadrés.