Mathématiques 2

Présentation du sujet

Cette année, les candidats étaient invités à résoudre des problèmes où les « opérations élémentaires » sur les matrices par la méthode du pivot sont un outil essentiel. Sous différents avatars, cette méthode permet aussi bien de trouver le rang, ou même simultanément l'image et le noyau d'une matrice. Un exemple proposé étant celui des polynômes interpolateurs (matrice de Vandermonde, ici d'ordre 3). L'énoncé demandait ensuite de s'intéresser en parallèle à l'étude des suites récurrentes, sur le modèle de $X_{n+1} = AX_n$, et des équations différentielles linéaires, sur le modèle de $X' = AX$, ce qui amène dans les deux cas à étudier les puissances de A, d'où des questions de diagonalisation.

Une application classique est l'étude des récurrences linéaires, qui faisait ici l'objet d'une question de cours.

Analyse globale des résultats

Les candidats se sont montrés assez efficaces sur les premières questions, pourtant d'une philosophie assez inhabituelle (description d'algorithmes, lecture de graphiques dans l'espace), mais très élémentaires. Par contre le reste de l'épreuve a montré des faiblesses dans la compréhension des conditions initiales d'un problème, ou de la notion générale de changement de variable. On note également que de nombreux candidats n'ont pas assez la culture de la « preuve », aussi succincte soit-elle. Rappelons que chaque assertion doit être justifiée.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Question préliminaire Cette question, finalement assez délicate, a été oubliée par de nombreux candidats. La notion de sous-espace affine semble assez mal (re)connue.

I.A La question a été correctement traitée, le plus souvent.

I.B Question un peu plus difficile, en particulier pour la reconnaissance des figures, mais un bon taux de réussite.

I.C.1, 2 Ici la situation est souvent correctement interprétée mais rarement justifiée (linéarité de f, invertibilité des opérations élémentaires).

I.C.3 À nouveau, trop peu de justifications (liberté de $(C''_{q+1}, \ldots, C''_n)$, théorème du rang) pour des assertions d'ailleurs largement suggérées par l'énoncé.

I.C.4 Quelques erreurs de calculs. Une erreur commune est également de donner les antécédents d'une base de $\mathrm{Im} f$ au lieu des images par f.

II.A.1 Ici le noyau est souvent vu comme un simple ensemble.

II.A.2 Il est très rare qu'on invoque ici la dépendance par rapport au couple (u_0, u_1) comme preuve de la dimension 2. Les explications parfois confuses sur les différents cas pour l'équation caractéristique achèvent d'installer le doute sur la dimension.

II.A.3 Cette question n'a été que très rarement traitée correctement. Malgré les garde-fous que pouvaient constituer les deux questions précédentes, le piège a hélas très bien fonctionné, ce qui jette la suspicion sur la solution donnée la plupart du temps à la question précédente. Il semble que les candidats ne savent pas eux-mêmes ce qu'ils entendent par « la suite $(r^n)_{n\geqslant 0}$ » dans le cas $r = 0$. Mise en regard de la suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$, ils l'assimilent presque toujours à la suite nulle.

II.A.4 Les questions demandant un programme informatique sont encore trop souvent contournées.

II.B Question pas toujours comprise.

II.C.2 Les justifications, il est vrai pas forcément élémentaires, sont le plus souvent absentes.

II.D.1 Cette question donne lieu a beaucoup d'erreurs malgré l'aide de la calculatrice. Moins de la moitié des tentatives produit un résultat sans erreur.

III.A.1 Oubli fréquent du cas de cercles tangents.

III.A.2 Beaucoup d'erreurs pour u_3. Notons que par projection stéréographique (qui transforme les cercles en cercles) on peut remplacer la sphère par un plan. Notons que seule la convexité stricte des disques joue un rôle dans le dénombrement.

III.B.3 Cette question est difficile et, malgré le découpage imposé par l'énoncé, a rarement été complétement justifiée. Notons qu'il faut montrer que la suite $(P(n))_{n\geqslant 0}$ détermine le polynôme P, ce qui peut d'ailleurs aussi être déduit de la dimension de l'espace des suites satisfaisant une récurrence linéaire.

IV.A.2 Beaucoup de candidats ont une bonne intuition de la réponse. Mais très peu de preuves sont effectivement données. L'idée de considérer les suites $(f(x + nT))_{n\geqslant 0}$ est rarement présente.

IV.B.2, 3 Ces questions ont paru effrayer nombre de candidats.

IV.C Les questions classiques d'analyse semblent maitrisées.

IV.D.2 Les quelques copies qui abordent cette question raisonnent par convergence dominée. Rappelons qu'il faut pour cela passer par la caractérisation séquentielle des limites. On pouvait aussi majorer $\dfrac{te^{-xt}}{e^t - 1}$ par e^{-xt} dont l'intégrale sur $[0, +\infty[$ vaut $\frac{1}{x}$.

Au chapitre des recommandations générales, on ne saurait trop conseiller aux candidats de vérifier eux-même leurs résultats chaque fois que c'est possible, en substituant le résultat de leurs calculs dans le problème posé initialement. Pour l'épreuve de cette année, c'était en effet souvent le cas : équations polynomiales (question II.D.1), vecteurs propres (y compris, noyau d'une application), systèmes linéaires… Les éventuelles étourderies sont alors facilement dépistées et corrigées, opération fort rentable en termes de points.

Un conseil matériel qui a son importance : bien numéroter ses copies et éviter absolument les erreurs de numérotation des parties et des questions. Bien que ce soit admis, il n'est pas très courtois envers le correcteur de sauter plusieurs fois d'une partie à une autre sans respecter l'ordre de l'énoncé.

Conclusions

Cet énoncé a permis de bien séparer les meilleurs candidats sur leurs connaissances, leur rapidité et leur rigueur.

On ne relève pas de lacune caractérisée. Il est toutefois très clair que les candidats montrent une plus grande maitrise et rapidité en analyse qu'en algèbre, même lorsqu'il s'agit d'algèbre linéaire élémentaire.