Les calculatrices sont autorisées

Notations et objet du problème

- La notation $\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
- n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- On note $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$ est notée I.
- Dans tout le problème, on identifie les deux espaces vectoriels $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire qu'on identifie un vecteur de $\mathbb{K}^n$ avec le vecteur colonne de ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. De la sorte, si $M \in M_n(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^n$, on peut former le produit $Mx \in \mathbb{K}^n$, ce qui permet de définir l'endomorphisme f_M canoniquement associé à M par :
$$\forall x \in \mathbb{K}^n,\ f_M(x) = Mx.$$
L'image de f_M, $(\mathrm{Im} f_M)$ sera notée $\mathrm{Im}(M)$ et le noyau de f_M, $(\mathrm{Ker} f_M)$ sera noté $\mathrm{Ker}(M)$.
Pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{K})$, on note $\sigma(M)$ le spectre de M, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On note $\rho(M)$ le rayon spectral de M, c'est-à-dire le plus grand module des valeurs propres de M.
- On dira qu'une suite de $\mathbb{K}^n$ (respectivement de $M_n(\mathbb{K})$) converge, ou est convergente, si elle converge pour une norme particulière de $\mathbb{K}^n$ (respectivement de $M_n(\mathbb{K})$). On sait qu'elle converge alors pour toute norme de $\mathbb{K}^n$ (respectivement de $M_n(\mathbb{K})$) puisque ces espaces sont de dimension finie.
- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle\ ,\ \rangle$. La norme euclidienne associée est notée $||\ ||$.
Un endomorphisme symétrique f de $\mathbb{R}^n$ est dit positif si, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\langle f(x), x\rangle \geqslant 0$.
Un endomorphisme symétrique est dit défini positif si, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, x non nul, $\langle f(x), x\rangle > 0$.
On dit de même qu'une matrice symétrique $M \in M_n(\mathbb{R})$ est positive si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est positif, et qu'elle est définie positive si ce même endomorphisme est défini positif.

Dans tout le problème, $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, $b \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur fixé, et l'on étudie des méthodes itératives pour approcher la ou les solutions du système $Ax = b$.

- version du 17 mars 2009 9h38

Partie I - La fonctionnelle J

I.A - Question préliminaire

I.A.1) Montrer qu'une matrice symétrique M de $M_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si son spectre $\sigma(M)$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$, et qu'elle est définie positive si et seulement si son spectre $\sigma(M)$ est inclus dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

I.B - Cas particulier : $n = 2$

Dans cette question, on pose $A = \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 75 \\ -75 \end{pmatrix}$. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\text{pour tout } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^2,\ F(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle.$$

a) Justifier que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction gradient de F (grad F) est notée ∇F.

b) Prouver que :
$$\forall\, v \in \mathbb{R}^2,\ \nabla F(v) = Av - b.$$

c) En déduire que la fonction F admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.

d) Déterminer la nature géométrique de la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = F(x_1, x_2)$.

e) Déduire de la question précédente que la fonction F admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera.

I.C - On suppose dans cette question que la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive et on définit l'application J de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, J(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle.$$

appelée la *fonctionnelle associée à A*.

I.C.1) Prouver que, pour tout couple (v, h) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle Av, h\rangle = \langle Ah, v\rangle.$$

On pose $\nabla J(v) = Av - b$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

I.C.2)

a) Expliciter la fonction $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\ v, h \in \mathbb{R}^n, J(v+h) = J(v) + \langle \nabla J(v), h\rangle + R(h).$$

Quel est le signe de $R(h)$?

b) On suppose qu'un vecteur $v_0 \in \mathbb{R}^n$ est tel que $J(v) \geqslant J(v_0)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

En observant que $J(v_0 + th) \geqslant J(v_0)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\nabla J(v_0) = 0.$$

I.C.3) On suppose que la matrice A est symétrique définie positive.

a) Montrer qu'il existe un unique $v_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $J(v_0) = \inf\limits_{v \in \mathbb{R}^n} J(v)$, et le déterminer en fonction de A et b.

b) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$, d non nul.

Montrer qu'il existe un unique $r \in \mathbb{R}$ tel que $J(v - rd) = \inf\limits_{\rho \in \mathbb{R}} J(v - \rho d)$.

Exprimer r en fonction de v, d et A.

I.C.4) On suppose encore que la matrice A est définie positive. Déterminer deux constantes $\alpha > 0$ et $m > 0$ en fonction du spectre de A telles que :

$$\langle \nabla J(v) - \nabla J(u), v - u\rangle \geqslant \alpha ||v - u||^2$$

$$||\nabla J(v) - \nabla J(u)|| \leqslant m||v - u||$$

pour tout couple (u, v) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

I.C.5) On suppose que la matrice A est symétrique positive, mais non inversible, et que b appartient à $\mathrm{Im}(A)$. On note u_0 un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $Au_0 = b$.

Déterminer l'ensemble des vecteurs v_0 tels que $J(v_0) = \inf\limits_{v \in \mathbb{R}^n} J(v)$ et préciser sa nature géométrique.

Partie II - Méthode du gradient à pas constant

II.A - Normes matricielles et rayon spectral

Une norme N sur $M_n(\mathbb{C})$ est dite *subordonnée* s'il existe une norme ν sur $\mathbb{C}^n$ telle que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$,

$$N(M) = \max_{x \in \mathbb{C}^n,\ x \neq 0} \frac{\nu(Mx)}{\nu(x)}.$$

On dit que N est subordonnée à ν.

II.A.1) On définit sur $\mathbb{C}^n$ la norme $||\ ||_\infty$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \dots, x_n),\ ||x||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

On note N_∞ la norme sur $M_n(\mathbb{C})$ subordonnée à $||.||_\infty$.

Montrer que, pour toute matrice $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, $N_\infty(M) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{ij}|$.

II.A.2) Soit N une norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que : $\forall\ A, B \in M_n(\mathbb{C}), N(AB) \leqslant N(A).N(B)$.

En déduire que : $\forall\ n \in \mathbb{N}, N(A^n) \leqslant (N(A))^n$.

b) Montrer que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho(M) \leqslant N(M)$.

II.A.3) Soit $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure de $M_n(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire $m_{ij} = 0$ si $i > j$).

Soit α un nombre réel strictement positif, et P_α la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1})$, c'est-à-dire dont le i-ème coefficient diagonal est α^{i-1}.

a) Calculer $P_\alpha^{-1} M P_\alpha$.

b) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $N_\infty(P_\alpha^{-1} M P_\alpha) \leqslant \rho(M) + \varepsilon$.

II.A.4) Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$ fixé.

a) Prouver l'existence d'une matrice P inversible et d'un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$N_\infty(P_\alpha^{-1} P^{-1} M P P_\alpha) \leqslant \rho(M) + \epsilon.$$

b) En déduire qu'il existe une norme subordonnée N sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$N(M) \leqslant \rho(M) + \varepsilon.$$

II.A.5) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $c \in \mathbb{C}^n$. On définit l'application f de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ par :

$$x \mapsto Mx + c.$$

Montrer l'équivalence des assertions (i) et (ii) ci-dessous :

(i) Pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, définie par $x_{k+1} = f(x_k)$, est convergente, et sa limite est indépendante de x_0.

(ii) $I - M$ est inversible et $\rho(M) < 1$.

Il pourra être utile d'introduire un réel $\epsilon > 0$ et de choisir une norme subordonnée N sur $M_n(\mathbb{C})$ telle qu'on ait l'inégalité $N(M) \leqslant \rho(M) + \epsilon$ pour la matrice M considérée.

II.B - Méthode du gradient à pas constant

Soit A une matrice symétrique positive, mais pas nécessairement inversible, b un vecteur appartenant à l'espace $\mathrm{Im}(A)$, et J la fonctionnelle associée à A.
On note x_0 un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $b = Ax_0$
On désigne par S une matrice symétrique définie positive donnée.

II.B.1) Montrer que l'application définie par $\phi(u,v) = \langle Su, v\rangle$, pour tout couple (u,v) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, fournit un produit scalaire sur l'espace $\mathbb{R}^n$.

II.B.2) Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont orthogonaux pour le produit scalaire ϕ défini à la question précédente.
En déduire qu'ils sont supplémentaires.

II.B.3) Montrer que, dans $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$, le système linéaire $Au = b$ possède une unique solution notée u'. Décrire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^n$.

II.B.4) Étant donné un nombre réel γ, on définit la suite récurrente

$$u_{k+1} = u_k - \gamma S^{-1} \nabla J(u_k)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ étant arbitrairement choisi.

a) Montrer que la composante du vecteur u_k sur le sous-espace $\mathrm{Ker}(A)$, dans la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(S^{-1}A) \oplus \mathrm{Ker}(A)$, est indépendante de k ; on la note w.

b) Pour tout k, u_k s'écrit donc $u_k = w + u'_k$ avec $u'_k \in \mathrm{Im}(S^{-1}A)$. Préciser l'application $f : \mathrm{Im}(S^{-1}A) \to \mathrm{Im}(S^{-1}A)$ telle que $u'_{k+1} = f(u'_k)$ pour tout k.

c) Montrer que les valeurs propres complexes de la matrice $S^{-1}A$ sont toutes réelles positives ou nulles.
Il pourra être utile de montrer que pour toute matrice X de $M_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, ${}^t\overline{X}SX > 0$.

d) Montrer qu'on définit un automorphisme linéaire g de $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$ en posant $g(x) = S^{-1}Ax$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(S^{-1}A)$.

On note Λ_n la plus grande valeur propre de $S^{-1}A$, et l'on suppose, jusqu'à la fin de cette partie, que $0 < \gamma < \dfrac{2}{\Lambda_n}\cdot$.

e) Dans cette question, on note id l'endomorphisme identité de l'espace $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$. Montrer que le polynôme caractéristique de $id - \gamma g$ est scindé sur $\mathbb{R}$, et que le rayon spectral de $id - \gamma g$ est strictement inférieur à 1.

f) En déduire que la suite $(u'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente dans le sous-espace $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$. On note u' sa limite. On peut donc écrire :

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = u' + w.$$

g) Quelle relation le vecteur u' vérifie -t-il ?

Partie III - Méthode du gradient à pas optimal

Dans cette partie, $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive. On note $v_0 \in \mathbb{R}^n$ le vecteur tel que $Av_0 = b$.
On construit une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence :

- on choisit $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et l'on pose $d_0 = \nabla J(u_0)$;
- en supposant u_k déjà construit, on définit u_{k+1} en fonction de u_k de la façon suivante :
  on pose $d_k = \nabla J(u_k)$ et on détermine $r_k \in \mathbb{R}$ tel que $J(u_k - r_k d_k) = \inf\limits_{\rho\in\mathbb{R}} J(u_k - \rho d_k)$
  (cf. I.C.3.b).
  On pose alors $u_{k+1} = u_k - r_k d_k$. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie, ainsi que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

III.A -

III.A.1) Montrer que, pour tout entier k, $\langle d_{k+1}, d_k\rangle = 0$.

III.A.2) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ dépendant du spectre de A tel que :

$$J(u_k) - J(u_{k+1}) \geqslant \frac{\alpha}{2} ||u_{k+1} - u_k||^2.$$

III.A.3) Prouver que la suite $(J(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Montrer alors que $\lim\limits_{k\to\infty} ||u_{k+1} - u_k|| = 0$.

III.A.4) Montrer que $||d_k|| \leqslant ||d_k - d_{k+1}||$, puis que $\lim\limits_{k\to+\infty} d_k = 0$.

III.A.5) Montrer que $\langle \nabla J(u_k), u_k - v_0\rangle \geqslant \alpha ||u_k - v_0||^2$. Prouver finalement que $\lim\limits_{k\to\infty} ||u_k - v_0|| = 0$.

III.B - Un exemple : $n = 2$, $c > 0$ est différent de 1, A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et $b = 0$. On suppose que $u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ n'a aucune composante nulle. On construit la suite (u_k) par la méthode décrite dans cette partie. On note $u_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$

III.B.1) Expliciter les composantes de u_{k+1} en fonction de celles de u_k et de c. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les deux composantes de u_k sont différentes de 0.

III.B.2) Montrer que le produit des coefficients directeurs de u_{k+1} et u_k est une constante indépendante de k, que l'on déterminera. On rappelle que le coefficient directeur de $u_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ est $t_k = \dfrac{y_k}{x_k}$.

III.B.3) Montrer que u_{k+2} et u_k sont colinéaires, et calculer le coefficient de colinéarité. Illustrer géométriquement le comportement de la suite (u_k) pour $c > 1$.

• • • FIN • • •
