Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet porte, comme son titre l'indique, sur les inégalités de Bernstein. Elles sont étudiées sous deux formes : l'inégalité de Bernstein sur les polynômes trigonométriques dans la partie I et une seconde version sur certaines fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont « localisées en fréquence » dans la partie II.

La preuve développée dans la partie I, initialement obtenue par Riesz, repose sur une formule d'interpolation qui permet d'exprimer la dérivée d'un polynôme trigonométrique en fonction d'un nombre fini de ses valeurs. En application de l'inégalité de Bernstein, la fin de la partie I montre le résultat analogue sur les polynômes algébriques, à savoir l'inégalité de Markov s'exprimant sous la forme $\|P'\|_{L^\infty(-1,1)} \leqslant (\deg P)^2 |P|_{L^\infty(-1,1)}$ pour tout polynôme algébrique.

La preuve développée dans la partie II repose sur les propriétés de la transformée de Fourier par rapport à l'opération de convolution.

Analyse globale des résultats

Le sujet est assez long pour couvrir un large spectre des points de la partie « analyse » du programme. Bien que les deux parties du sujet soient indépendantes et de longueurs équivalentes, la seconde partie du sujet a été beaucoup moins traitée. S'agissant des résultats, le jury considère que, pour la plupart, les candidats ont compris les questions posées et ont entamé des tentatives raisonnables (qui ont parfois été couronnées de succès). La première sous-partie du sujet porte sur un thème classique (à savoir les polynômes de Tchebychev) et a été globalement bien réussie. Elle a permis aux candidats de prendre confiance en eux dans l'appropriation du sujet. Les autres sous-parties comprennent essentiellement des blocs quasi-indépendants de questions abordables même si certaines questions étaient difficiles (**Q14**, **Q27**) voire très difficiles (**Q30**). S'il est vrai que certaines copies sautent bon nombre de questions, ce phénomène a semblé assez minoritaire vu la forme du sujet et l'agencement de ses questions. En outre, certaines copies ont montré une bonne maitrise des arguments d'analyse.

Signalons également que les notes d'un nombre trop important de copies (environ un dixième) ont subi un malus de présentation.

Mentionnons quelques difficultés rencontrées dans les copies et qui devraient être absentes :

- la nécessité d'invoquer un argument par récurrence double (ou forte) est parfois mal comprise (voir **Q1** ci-dessous) ;
- les candidats n'ont parfois pas su factoriser des polynômes simples dont les racines sont données (**Q9**) ;
- certains candidats ont beaucoup de difficultés à manipuler des valeurs absolues, des modules de nombres complexes et des calculs algébriques sur des sommes finies (avec une attention particulière sur la gestion des indices) ;
- certains candidats confondent une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et le nombre complexe $f(x)$. Ainsi, la preuve de la linéarité de la transformée de Fourier a donné lieu à des calculs étranges (comme $\hat{f}(\lambda\xi + \mu\xi') = \lambda\hat{f}(\xi) + \mu\hat{f}(\xi')$).

Finissons par un aspect positif : le jury a été agréablement surpris de l'usage fait des formules d'Euler de cosinus et sinus dans certaines réponses (**Q2**, **Q5**) et des tentatives de représentations graphiques non demandées dans l'énoncé (**Q29**, **Q30**).

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Q1. Question globalement bien traitée. Signalons qu'une argumentation par récurrence apparait souvent dans les premières questions de l'épreuve et qu'une rédaction nette est attendue :

- explication claire de la nature de la récurrence (simple ou forte). Un principe intermédiaire est celui de la récurrence d'ordre fini, disons d'ordre 2 dans le cas de la **Q1** dans laquelle on a besoin des rangs n et $n+1$ (ou $n-1$ et n selon rédaction) ;
- explicitation d'une hypothèse de récurrence que l'on peut appeler $H(n)$ par exemple ;
- mention de l'initialisation, par exemple preuve de $H(0)$ et $H(1)$ dans le cas d'une récurrence double ;
- preuve de la récurrence, dans le cas d'une récurrence simple démonstration de $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n) \implies H(n+1)$, dans le cas d'une récurrence double démonstration de $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \big(H(n-1), H(n)\big) \implies H(n+1)$ et dans le cas d'une récurrence forte $\forall n \in \mathbb{N},\ \big(\forall k \leqslant n,\ H(k)\big) \implies H(n+1)$.

Pour revenir à la question **Q1** et à la preuve de l'égalité $\deg(T_n) = n$, certaines copies mentionnent parfois la formule $\deg(P+Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$ en oubliant qu'elle n'est généralement vraie que si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.

S'agissant de la preuve du fait que $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, l'argument invoquant que (T_k) est une famille échelonnée de polynômes (c'est-à-dire $\deg(T_k) = k$) devait être accompagné d'une comparaison entre la longueur de la famille $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et la dimension de $\mathbb{C}_n[X]$ (qui vaut $n+1$ et non n).

Q2. Question globalement bien traitée. Étant donné la forme de l'énoncé, le sujet amenait à faire une récurrence d'ordre 2 (ou forte) via la formule

$$\cos\big((n+2)\theta\big) = 2\cos(\theta)\cos\big((n+1)\theta\big) - \cos(n\theta)$$

Cette dernière formule nécessite bien entendu un argument (sans quoi il est impossible au jury de vérifier que la formule de trigonométrie est bien comprise). Parmi les arguments les plus simples, on peut invoquer la formule de trigonométrie $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$. Signalons que certaines copies ont invoqué les formules d'Euler de cos afin de prouver facilement l'expression ci-dessus.

Q3. Question globalement bien traitée. Il s'agit d'une conséquence immédiate des deux précédentes questions. Mentionnons que le jury a tout de même partiellement valorisé les copies ayant tenté de développer un polynôme P dans la base canonique sans réussir à achever la preuve. Cet angle d'attaque ramène le problème à montrer que $\theta \mapsto \cos^k(\theta)$ est un polynôme trigonométrique pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Q4. Question globalement bien traitée. Sachant que la fonction $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ est surjective, il s'agissait d'écrire

$$|T_n|_{L^\infty([-1,1])} = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \Big|T_n\big(\cos(\theta)\big)\Big| = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \Big|\cos(n\theta)\Big| = 1.$$

Mentionnons quelques confusions avec la gestion de la valeur absolue et concernant la distinction borne supérieure/majorant.

Q5. Il s'agit de la première question difficile, elle est essentiellement bien traitée dans la moitié des copies. Pour la plupart, les preuves de l'indication, à savoir l'inégalité $|\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin(\theta)|$, ont été faites par un argument de récurrence reposant sur les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\Big|\sin\big((n+1)\theta\big)\Big| &= |\cos(\theta)\sin(n\theta) + \sin(\theta)\cos(n\theta)| \\
&\leqslant |\cos(\theta)||\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)||\cos(n\theta)| \\
&\leqslant |\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)| \\
&\leqslant (n+1)|\sin(\theta)|.
\end{aligned}$$

Signalons que certaines copies ont des difficultés à bien gérer la valeur absolue dans les inégalités précédentes.

En outre, le joli argument suivant (sans récurrence) reposant sur la factorisation explicite de $x^n - y^n$ par $x - y$ a été trouvé plusieurs fois :

$$2|\sin(n\theta)| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right| = \underbrace{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right|}_{2|\sin(\theta)|}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^k(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^{n-1-k}\right| \leqslant 2|\sin(\theta)| \times n$$

car chaque terme $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^k(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^{n-1-k}$ est de module 1. Autrement dit, on a $|\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin(\theta)|$.

Revenons au cœur de la question : en dérivant la formule $T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$ par rapport à θ, on trouve $\sin(\theta)T_n'\big(\cos(\theta)\big) = n\sin(n\theta)$ mais beaucoup de candidats ont confondu la dérivée de $\theta \mapsto T_n\big(\cos(\theta)\big)$ avec $\theta \mapsto T_n'\big(\cos(\theta)\big)$, ce qui a amené à la formule fausse $\left|T_n'\big(\cos(\theta)\big)\right| = n\left|\sin(n\theta)\right|$.

Pour les candidats ayant obtenu la formule juste $T_n'\big(\cos(\theta)\big) = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$ (pourvu que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$), il fallait encore établir $\left|T_n'\big(\cos(\theta)\big)\right| \leqslant n^2$ (conséquence évidente de l'indication) et prouver l'optimalité de cette inégalité. Les deux arguments les plus fréquents pour l'optimalité ont été :

- une bonne gestion de la limite $\theta \to 0$;
- ou encore une preuve plus longue par récurrence de la formule $T_n'(1) = n^2$ (via les formules de récurrence $T_{n+2}'(1) = 2T_{n+1}(1) + 2T_{n+1}'(1) - T_n'(1)$ et $T_n(1) = 1$).

Signalons que certaines copies ont tenté de prouver directement la majoration $|T_n'(x)| \leqslant n^2$ par récurrence pour un nombre quelconque $x \in [-1, 1]$.

Q6. Moins de la moitié des copies présentent des réponses satisfaisantes. Voici les trois approches les plus couronnées de succès :

- justifier que les deux membres sont deux polynômes de degrés strictement inférieurs à $2n$ et qui coïncident en $2n$ points distincts. Le cours assure alors l'égalité escomptée ;
- invoquer une décomposition en éléments simples de $\frac{B}{A}$ où chaque pôle est simple (rappelons que valeur du coefficient de $\frac{1}{X-\alpha_k}$, à savoir $\frac{B(\alpha_k)}{A'(\alpha_k)}$, pouvait être utilisée sans justification) ;
- reconnaitre les polynômes d'interpolation de Lagrange (même si parfois le bon nombre de points, ici $2n$, n'a pas été bien injecté dans les formules classiques des polynômes d'interpolation de Lagrange).

Q7. Globalement bien traitée. Le seul point à remarquer est l'égalité $P_\lambda(1) = 0$.

Q8. Globalement bien traitée. On pouvait s'en sortir par (au moins) deux chemins :

- sans doute la méthode la plus courte, on dérive $(X-1)Q_\lambda(X) = P(\lambda X) - P(X)$ et on évalue l'indéterminée X en 1. À ce propos, le jury déconseille fortement d'écrire $Q_\lambda(X-1)$ pour signifier le produit de Q_λ par $X - 1$!
- une autre méthode pour laquelle il fallait être méticuleux, on souhaite faire tendre x vers 1 dans l'égalité

  $$Q_\lambda(x) = \frac{P(\lambda x) - P(\lambda)}{x - 1}.$$

  La dérivation au sens complexe est hors programme et il est conseillé de restreindre x à un voisinage réel de 1. Et même sous cette restriction, il n'est pas clair que la limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{P(\lambda x) - P(\lambda)}{x - 1} = \lambda P'(\lambda)$$

soit dans le programme sans justification (mais le jury n'a bien entendu pas pénalisé cette formule tant elle est naturelle et surtout vraie !).

Beaucoup de copies ont soigneusement contourné l'écueil de la dérivation (complexe ou réelle) en décomposant linéairement P dans la base canonique des monômes. Dans ce cas, tout se ramenait à traiter le cas particulier $P = X^k$ pour lequel des calculs très simples sont possibles.

Q9. Cette question a essentiellement été bien traitée dans la moitié des copies. Le jury a été un peu déçu par certaines rédactions car la factorisation de polynômes simples doit faire partie des compétences attendues. Les racines $2n$-ièmes de -1 sont les racines du polynôme $X^{2n} + 1$ et non celles du polynôme $X^{2n} - 1$. On pouvait :

- soit utiliser la factorisation de $X^{2n} - 1$ découlant du cours et en déduire celle de $X^{2n} + 1$ via la formule $X^{2n} + 1 = -\big((X \exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}))^{2n} - 1\big)$;
- soit vérifier que les $2n$ supposées racines ω_k sont bien racines, qu'elles sont distinctes deux à deux et en déduire que les deux polynômes R et $\prod_{k=1}^{2n}(X - \omega_k)$ (de même degré) sont colinéaires (et donc égaux car unitaires). Sur ce point, la justification que les nombres ω_k sont bien distincts a parfois donné lieu à de faux arguments (la fonction exp n'est en effet pas injective sur $\mathbb{C}$ comme le montre l'égalité $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}$).

Voici un point qui ne n'a pas été pénalisé mais que le jury conseille d'éviter : la lettre X a parfois été utilisée comme une inconnue dans l'équation $X^{2n} + 1 = 0$ (ce fut d'ailleurs également le cas dans la question **Q8**). Traditionnellement, la lettre X est une indéterminée polynomiale et l'équation $X^{2n} + 1 = 0$ est fausse si elle est comprise comme égalité dans $\mathbb{C}[X]$.

La notation $\sqrt[n]{z}$ ne peut pas être utilisée pour désigner les racines n-ièmes d'un nombre complexe.

Q10 et **Q11**. Ces questions ont globalement bien été traitées.

Q12. Cette question est facile sur le fond mathématique : on demande de prouver qu'une fonction polynomiale trigonométrique f peut être représentée sous la forme $f(\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} U(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ avec $U \in \mathbb{C}[X]$. Le jury a été un peu déçu de constater que, pour plus de la moitié des copies, le problème était d'ordre rédactionnel. Ainsi, il paraissait assez clair que bon nombre de candidats avaient compris comment résoudre cette question mais leur gestion du symbole $\sum$ (pourtant avec un nombre fini de termes) a été très problématique notamment sur les indices.

Voici, par exemple, une preuve qui s'émancipe de la gestion du symbole $\sum$. On affirme qu'il suffit de trouver des polynômes $U_0, ..., U_n, V_1, ..., V_n$ de $\mathbb{C}[X]$ tels que :

- $a_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} U_0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$;
- $a_k \cos(k\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} U_k(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$;
- $b_k \sin(k\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} V_k(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$.

En effet, le polynôme $U = U_0 + \sum_{k=1}^{N}(U_k + V_k)$ conviendra par linéarité. On traite les trois cas précédents comme suit :

- on choisit $U_0 = a_0 X^n$ si bien que l'on a bien le résultat voulu ;
- pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, on écrit $a_k \cos(k\theta) = \frac{a_k}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} + \frac{a_k}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} = \frac{a_k}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+n)\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-k+n)\theta}\right)$ si bien que $U_k = \frac{a_k}{2}(X^{k+n} + X^{-k+n})$ convient (on a bien $\deg(U_k) \leqslant 2n$) ;
- le dernier cas se résout de même avec la formule eulérienne du sinus.

Q13. La plupart des copies gèrent de manière très satisfaisante la formule trigonométrique demandée. En particulier, la factorisation par « l'arc moitié », c'est-à-dire $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=-2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\sin(\theta/2)$ est bien connue. La suite a posé plus de difficultés, à savoir la dérivation de $f(\theta)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}U(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ par rapport à θ.

Q14. On peut dire que c'est la première question délicate car qu'il fallait utiliser une formule qui apparait dans la preuve de la question **Q11**, à savoir $-2n^2=\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}$. Cette question est ainsi révélatrice des bonnes copies et a été bien traitée dans 25 % des copies.

Q15. Cette question a été globalement bien traitée. Signalons néanmoins quelques écueils :

- la dérivation de la fonction composée $\theta\mapsto P\big(\cos(\theta)\big)$ pose parfois problème ;
- le nombre $\sqrt{1-\cos^2(\theta)}$ ne vaut pas $\sin(\theta)$ en toute généralité mais $|\sin(\theta)|$ (selon les rédactions, ce point n'a pas été pénalisé car n'a pas d'impact dans la suite).

Q16. L'indication a été bien traitée dans moins de 25 % des copies. On veut prouver que $\theta\mapsto Q\big(\cos(\theta)\big)\sin(\theta)$ est une fonction polynomiale trigonométrique de « degré » inférieur ou égal à n pour tout $Q\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Voici deux moyens de procéder :

- on commence par fixer $P\in\mathbb{C}_n[X]$ tel que $P'=Q$ puis l'on constate que $Q\big(\cos(\theta)\big)\sin(\theta)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(-P(\cos(\theta))$. Il suffit donc de vérifier que $\mathcal{S}_n$ est stable par dérivation et cela se vérifie immédiatement par la définition d'un polynôme trigonométrique (à noter qu'il n'y a pas perte de « degré » par dérivation) ;
- en invoquant la question **Q1**, il suffit de prouver que $\theta\mapsto T_k(\cos(\theta))\sin(\theta)$ appartient à $\mathcal{S}_n$ pour tout $k\in\{0,...,n-1\}$. Il ne reste plus qu'à utiliser les formules de trigonométrie classiques pour linéariser $\cos(k\theta)\sin(\theta)=\frac{1}{2}\sin((k+1)\theta)-\frac{1}{2}\sin((k-1)\theta)$.

Q17. Moins d'un quart des réponses ont été satisfaisantes. Dans de nombreuses copies, il est affirmé que $x\mapsto xt$ est une bijection de l'ensemble $[0,1]$ dans lui-même pour tout paramètre $t\in[-1,1]$. En fait, le point délicat était de remarquer que l'on a $\sqrt{1-x^2}\leqslant\sqrt{1-(xt)^2}$ pour tout $t\in[-1,1]$ et $x\in[0,1]$.

Q18. Moins d'un quart des réponses ont été satisfaisantes. Il s'agissait de combiner **Q15** et **Q17**. Il n'y avait aucune difficulté particulière (hormis d'écrire les deux inégalités dans le bon ordre !).

Q19. Étant donné le sujet, la réponse attendue était un rappel des propriétés vérifiées par les polynômes de Tchebychev (**Q4** et **Q5**). Mais le jury a bien entendu validé tous les points pour la réponse expéditive « $P=0$ » (puisque la question n'imposait pas la non-nullité de P). La valeur de l'entier n étant fixée par l'énoncé, il ne s'agissait pas de trouver un cas d'égalité pour une valeur particulière de n mais pour toute valeur.

Q20. Comme cette question est la première de la seconde partie (qui plus est indépendante de la première), les statistiques de bonnes réponses repartent à la hausse et cette question a globalement bien été traitée.

Il s'agit d'une application du théorème de continuité sous le signe $\int$. Toutes les hypothèses du théorème du programme ont été attendues pour avoir la note maximale à cette question. Pour autant, et toujours conformément au programme, l'hypothèse de continuité par morceaux par rapport à la variable d'intégration est secondaire[3] et le jury n'a pénalisé que de façon très minoritaire un oubli de cette hypothèse.

L'hypothèse importante est la domination de $f(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}$ par une fonction intégrable en x et indépendante de ξ. À ce propos, majorer les nombres complexes directement (par exemple $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\leqslant 1$) n'a pas de sens et il faut passer par le module.

[3] Cette hypothèse peut être sensiblement affaiblie dans le cadre de la théorie hors programme de l'intégration de Lebesgue au point d'être satisfaite par toute fonction raisonnable. Cette hypothèse de continuité par morceaux a seulement vocation à être cohérente avec les limitations du programme.

Mentionnons quelques points négatifs :

- dans cette question et des suivantes, il a été trop souvent affirmé que le produit de deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;
- trop de candidats écrivent $|f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}| \leqslant f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xa}$ en ayant pris un nombre ξ dans $[a,b]$ préalablement. Cela n'a pas de sens car i n'est pas un nombre strictement positif.

Q21. La preuve de linéarité a été globalement bien traitée (le contraire serait surprenant !). Pour une première preuve de linéarité, le jury conseille d'écrire explicitement l'une des définitions équivalentes de la linéarité :

- pour toutes fonctions f et g et tous nombres λ et μ on a $\widehat{\lambda f + \mu g} = \lambda\hat{f} + \mu\hat{g}$;
- pour toutes fonctions f et g et tout nombre λ on a $\widehat{\lambda f + g} = \lambda\hat{f} + \hat{g}$;
- pour toutes fonctions f et g et tout nombre λ on a $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$ et $\widehat{\lambda f} = \lambda\hat{f}$.

En effet, des copies ont contenu des tentatives de preuve de la linéarité de l'application $\xi \in \mathbb{R} \mapsto \hat{f}(\xi)$. Autrement dit, cette question souligne la confusion entre $\hat{f}(\xi)$, $\hat{f}$ et $f \mapsto \hat{f}$.

En général, les candidats ont bien conscience que la continuité d'une application linéaire découle d'une inégalité.

Q22. Question bien traitée dans moins de la moitié des copies. Rappelons que le programme indique explicitement que « les étudiants peuvent appliquer ce résultat *sans justification* dans le cas de changements de variables simples » (notamment les changements affines). De plus, certaines copies ont mentionné qu'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ est forcément bornée (il s'agit d'une erreur à éviter) ou encore que la composée de deux fonctions intégrables est intégrable.

Q23. Question bien traitée dans moins de la moitié des copies. Bien que l'énoncé soit clair, l'agencement des phrases a laissé penser à certains candidats que la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable (pour tout x). Or la première partie de la question a précisément pour but de montrer cette intégrabilité sous les hypothèses $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

En outre, certains candidats ont fait l'erreur suivante : la version intégrale de l'inégalité triangulaire a été invoquée comme suit

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,\mathrm{d}t$$

pour en déduire l'intégrabilité de $t \mapsto f(t)g(x-t)$. Cela constitue une méprise car l'intégrabilité nécessite plutôt de montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,\mathrm{d}t$ est finie.

Q24. Question globalement bien traitée. Il s'agissait d'intégrer les calculs faits à la question précédente.

Q25. Question bien traitée dans la moitié des copies. Le jury a constaté que beaucoup de copies utilisent la dénomination « théorème de la convergence dominée » pour évoquer le théorème de continuité ou régularité $\mathcal{C}^k$ sous le signe $\int$. S'il est vrai que le théorème de la convergence dominée est l'ingrédient principal des théorèmes concernant les intégrales à paramètres, il est préférable d'utiliser la bonne dénomination (le jury n'a évidemment pas pénalisé une mauvaise dénomination à partir du moment où les bonnes hypothèses étaient énoncées). Au niveau de la validation des hypothèses, voici deux commentaires :

- l'hypothèse d'intégrabilité (par rapport à t) des dérivées intermédiaires est souvent oubliée ;

– certains candidats n'utilisent pas l'extension $\mathcal{C}^k$ du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre et proposent une démonstration par récurrence. Une telle démarche est raisonnable mais prend plus de temps.

Q26. Question bien traitée dans moins de la moitié des copies. Il s'agissait de bien enchainer des calculs intégraux et d'utiliser les formules admises au bon endroit.

Q27. Il s'agit d'une question classique mais difficile. Elle a donné lieu a des réponses satisfaisantes dans un tiers des copies. Mentionnons que le point difficile de la question est souvent mal traité : une fois que la formule $\varphi^{(k)}(t) = P_k(1/t)\mathrm{e}^{-1/t}$ est démontrée, on en déduit à raison que $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \varphi^{(k)}(t) = 0$. Cela ne prouve pas (encore) la continuité de $\varphi^{(k)}$ en 0 puisque l'égalité $\varphi^{(k)}(0) = 0$ n'a pas encore de sens. C'est à cet endroit que le théorème de la limite de la dérivée ou le théorème $\mathcal{C}^k$ par prolongement[4] doit être utilisé (en tenant compte de toutes les limites intermédiaires $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \varphi^{(j)}(t) = 0$ avec $1 \leqslant j \leqslant k$). Il semble peut-être plus facile de montrer rigoureusement que φ est $\mathcal{C}^k$ par récurrence sur k grâce au théorème de la limite de la dérivée. Un autre moyen, a priori plus efficace, serait de directement invoquer le théorème $\mathcal{C}^k$ par prolongement. On fera alors attention au fait que ce dernier prouve que la restriction de φ à $]0, +\infty[$ admet un prolongement $\mathcal{C}^k$ sur $[0, +\infty[$ et il reste à justifier que ce prolongement est la fonction définie dans l'énoncé. Cela est une conséquence du fait qu'une fonction continue et une fonction $\mathcal{C}^k$ (donc continue) sur $[0, +\infty[$ sont égales pourvu qu'elles soient égales sur $]0, +\infty[$. Le jury n'attendait pas une rédaction aussi précise mais le théorème de la limite de la dérivée (par récurrence) ou le théorème $\mathcal{C}^k$ par prolongement devait être mentionné pour l'obtention de la totalité des points.

Q28. Question bien traitée dans environ un tiers des copies. On a la formule $\psi(t) = \varphi(1 - t^2)$ qui saute aux yeux vu les définitions de ψ et φ. Le jury attendait une disjonction de cas selon que $t \in]-1, 1[$ ou non.

Plusieurs candidats ont écrit la fonction ψ à l'aide de la fonction racine carrée avant de conclure au caractère $\mathcal{C}^\infty$ par produits et composition. Rappelons que la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ n'est même pas dérivable sur son ensemble de définition.

Q29. Question globalement bien traitée dans les copies qui l'ont abordée. La première partie de la question est très facile. Pour la seconde partie, à savoir la preuve de l'inégalité $A < B$ il s'agissait par exemple de remarquer que θ est strictement croissante sur $[-1, 1]$ (car sa dérivée est strictement positive) et donc que $A = \theta(-1) < \theta(1) = B$.

Q30. Il s'agissait sans doute de la question la plus difficile du sujet. Environ 200 copies ont obtenu une réponse satisfaisante. Le jury a valorisé des représentations graphiques. Tout le jeu de la preuve consistait en une bonne gestion de transformations affines.

Q31. Question bien traitée par environ un cinquième des copies. On revient sur un thème plus classique et déjà abordé dans le sujet, à savoir l'étude d'une intégrale à paramètre. Certains candidats ont des difficultés avec les modules de nombres complexes. Enfin, la fonction $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ n'est ni monotone ni positive (erreur déjà commise en **Q21**). Il devrait être connu que sa dérivée est $\theta \mapsto \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Q32. Environ une centaine de copies contenait une bonne réponse. La première partie de la question, à savoir le caractère borné de $x \mapsto x^2 r(x)$, est très difficile et découle d'une double intégration par parties. La seconde partie de la question, à savoir que r est intégrable et bornée sur $\mathbb{R}$, découle cette fois-ci d'arguments plus standards.

Q33. Environ une centaine de copies contenait une bonne réponse. Il s'agissait d'exploiter convenablement l'injectivité de la transformée de Fourier (admise dans l'énoncé) et le fait que la transformée de Fourier

[4] Voir le programme MPSI 2013 dans le chapitre concernant la dérivabilité.

d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier (**Q26**). Le jury a valorisé des preuves formelles, c'est-à-dire découlant du calcul intégral « pourvu que toutes les intégrales convergent ».

Q34. Environ une centaine de copies contenait une bonne réponse. Cette dernière question n'était pas difficile mais concluait un marathon de questions ! Elle découlait de l'analyse précédente et notamment de la question **Q25**.

Conclusion

Comme mentionné ci-dessus, le sujet est long mais les questions sont très abordables (sauf quelques questions difficiles) et parfaitement conformes aux exercices et cours étudiés dans le programme. Le sujet est clairement marqué « analyse » même s'il contient quelques questions d'algèbre linéaire ou ayant trait aux polynômes. On conseille aux candidats d'écrire soigneusement les arguments qui leur semblent suffisants pour conclure, de se rappeler qu'une réponse fait rarement une ligne, de tracer des allures de courbes, de lire une question intégralement (avec les indications) et de parcourir un peu les questions suivantes ! Enfin, mentionnons que le jury a valorisé les tentatives raisonnables de preuve (même si elles n'ont pas abouti).