Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet s'inscrit dans la volonté de mettre en avant la théorie des probabilités. Cinq parties composent le sujet avec pour thème commun la notion de décomposition dyadique d'un nombre. Les probabilités interviennent pour gérer des chiffres aléatoires.

La première partie a pour but de calculer la suite des fonctions caractéristiques d'une suite de variables aléatoires. La notion de fonction caractéristique n'est pas au programme de la filière MP et sa définition est donnée. Le but est de calculer la limite de la suite des fonctions caractéristiques.

L'objet de la deuxième partie est l'exploration de la correspondance entre un nombre dyadique et la suite finie de ses chiffres. Cette deuxième partie ne contient pas d'arguments probabilistes et est focalisée sur des arguments de théorie des ensembles (preuve de surjectivité et bijectivité) et d'analyse élémentaire (obtention d'inégalités).

Les probabilités reviennent dans la troisième partie par l'intermédiaire de l'étude de la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Le but est d'obtenir un résultat de décomposition de variables aléatoires (signalons au passage que le sujet Mathématiques 2 de l'année 2017 explore cette notion de décomposabilité). L'objectif est de démontrer que si Y_n est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble, noté D_n, des nombres dyadiques de la forme $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j 2^{-j}$ avec $(x_j) \in \{0,1\}^n$ alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- la variable aléatoire Y_n suit une loi uniforme dans D_n,
- la variable Y_n se décompose comme une somme $\sum\limits_{j=1}^{n} U_j 2^{-j}$ où les variables aléatoires $U_1, ..., U_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi Bernoulli de paramètre $1/2$.

La quatrième partie a pour objectif d'appliquer concrètement les résultats de la partie précédente. De façon précise, le sujet amène à étudier la convergence en loi des variables aléatoires Y_n dans le but d'obtenir la loi uniforme sur $[0,1]$. Ce calcul de limite est mis en application pour démontrer la formule

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln 2.$$

La cinquième partie revient à l'analyse usuelle (donc évite la théorie des probabilités) dans le cadre des décompositions dyadiques. On explore une autre conséquence du passage à la limite de n vers $+\infty$. En l'occurrence, une bijection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sur $[0,1[$ est construite et permet d'en déduire que $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

Analyse globale des résultats

Les candidats ont majoritairement abordé les parties I et II (avec environ 50 % de réussite). Les parties III et IV, plus difficiles, ont été beaucoup moins abordées (et sont globalement peu réussies). La partie V est indépendante des autres parties et a donc pu être considérée par beaucoup plus de candidats que pour un sujet unifié usuel (de fait, certaines copies ont esquivé les parties III et IV pour aborder la partie V).

Le sujet est de longueur habituelle et cela a impliqué, comme les années précédentes, que des candidats aient tenté de traiter un maximum de questions en évitant les plus difficiles. Or le sujet contenait quatre ou cinq questions difficiles qui ont comptabilisé environ 6 points sur 20 sur la note finale. Les copies ayant fait l'impasse des questions difficiles ont donc vu leur note finale comptabilisée de facto sur 14. Par exemple, certaines copies ayant traité, avec plus ou moins de réussite, la quasi-totalité du sujet (sauf les questions difficiles) ont pu obtenir une note de 12 sur 20. À contrario, des copies, qui ont attaqué le sujet de façon linéaire, ont pu s'approprier le sujet et être en mesure d'aborder les questions difficiles. Certaines de ces copies ont pu dépasser la note 12 sans même aborder la dernière partie (ou même un grande portion de la partie IV).

Nous reviendrons en détail sur le fond mathématique dans la suite mais permettons-nous de mentionner les deux points suivants :

- le manque de rigueur fut un sérieux écueil pour gagner des points sur des questions faciles (tout particulièrement pour les parties I, II et V) ;
- la théorie des probabilités est de plus en plus présente dans les sujets de concours. Or l'examen des résultats montre que moins de 25 % des copies ont réussi à s'approprier le vocabulaire adéquat (indépendance, estimations élémentaires d'une probabilité ou encore distinction entre lois et variables aléatoires).

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

La partie I est assez élémentaire (à l'exception de la question **Q7**). Elle a été globalement bien traitée dans la moitié des copies. Le principal défaut rencontré a été le manque de rigueur (oubli de distinction entre $t = 0$ et $t \neq 0$ ou encore oubli de vérification que le dénominateur d'un quotient ne doit pas être nul). Par exemple, la question **Q2** nécessite une récurrence. Beaucoup de copies (plus de la moitié) ne contiennent pas l'argumentation standard « initialisation + hérédité ». S'agissant de la théorie des probabilités, la question **Q5** est un marqueur de son assimilation et n'a été réussie que dans 15 % des copies. Pour revenir à l'analyse usuelle, environ seulement 300 copies ont montré une bonne compréhension de la notion de convergence uniforme en vue de traiter la question **Q7**.

La partie II est globalement élémentaire et beaucoup de candidats ont facilement obtenu des points. Cette partie est la mieux réussie dans les copies les plus rigoureuses. De fait, la majeure partie des pertes de points est à mettre sur le compte de l'absence de rigueur :

- la question **Q8** demande de vérifier qu'une fonction est bien définie. Cela exige de vérifier que l'expression de la fonction a un sens et que l'ensemble de départ est envoyé sur l'ensemble d'arrivée ;
- certaines copies invoquent, par réflexe, une argumentation d'applications linéaires pour déduire la bijectivité à partir de la surjectivité. Or les applications considérées ne sont pas linéaires ;
- les inégalités strictes $<$ et larges $\leqslant$ sont parfois confondues ;
- à l'invitation du sujet (question **Q10**), on demande d'effectuer un argument par récurrence mais la question se garde bien de préciser la variable entière à considérer (k ou n). Certaines copies ont considéré k, ce qui est possible mais sensiblement plus laborieux que le choix de n ;
- l'analyse d'une quantité comme $\min(n, k)$ devrait logiquement amener les candidats à comparer n et k, or certaines copies essaient maladroitement d'obtenir $\min(n, k)$ directement.

Le niveau s'élève avec la partie III. Les questions sont moins nombreuses mais plus difficiles (et donc valorisées). En raison de l'unité d'argumentation qui relie **Q20**, **Q21** et **Q22**, le jury a décidé de considérer les trois questions comme un seul bloc. Ainsi, le jury a accordé des points à la question **Q22** pour des arguments effectués dans les réponses des questions **Q20** ou **Q21** (en l'occurrence pour le calcul de la probabilité $\mathbb{P}(Y_n = x)$). La question **Q23** est l'une des questions les plus difficiles du sujet et fut bien traitée dans 10 % des copies. Comme pour d'autres questions, le jury a partiellement valorisé les copies ayant fait montre d'une démarche scientifique allant dans la bonne direction même si la réponse n'était pas complète. Cette partie a été réussie dans 33 % des copies.

La partie IV peut se décomposer en deux parties :

- les premières questions **Q24**, **Q25**, **Q26** et **Q28** sont faciles pourvu qu'on fasse preuve d'un peu de rigueur. Comme précédemment, ces questions étaient très abordables mais un manque de rigueur a produit de sérieuses pertes de points dans certaines copies ;
- par contre, les questions **Q27**, **Q29**, **Q30** et **Q31** sont plus difficiles.

Le jury tient à souligner que, contrairement à la ligne directrice du sujet, certains candidats ont reconnu dans la question **Q29** une somme de Riemann. Le jury a bien entendu valorisé cette méthode de résolution.

Les questions de la partie V sont très abordables, hormis la question **Q36**. Les copies ayant traité cette partie ont pu obtenir des points avec peu d'efforts (tout particulièrement pour la dernière question).

L'extrait suivant du rapport 2017 (et répété en 2018) est toujours d'actualité : « le jury rappelle aux candidats que tous leurs calculs sont lus et il est donc illusoire de simuler une bonne réponse avec des calculs hasardeux qui aboutissent, par magie, à la réponse demandée ». Dans certaines copies, la stratégie suivante s'est fréquemment répétée : une réponse débute par une paraphrase de la question, puis une série d'arguments incomplets pour finir par l'énoncé de la conclusion demandée. Bien que le jury soit naturellement ouvert à des réponses innovantes et astucieuses, il n'en demeure pas moins qu'il étudie préalablement les potentielles réponses de chaque question. Ainsi, les futurs candidats doivent comprendre que la stratégie du bluff est vouée à l'échec. Au contraire, le jury est plus enclin à valoriser une réponse présentant une démarche scientifique honnête même si elle n'aboutit pas.

Comme signalé ci-dessus, une épreuve scientifique nécessite d'invoquer des arguments de façon rigoureuse et précise. Le jury invite les futurs candidats à bien lire les détails des questions. Ainsi, montrer qu'un ensemble D est inclus dans $[0,1[$ ne signifie pas démontrer l'inclusion $D \subset [0,1]$.

La qualité de rédaction est également importante, notamment sur les premières questions : il est difficile à un correcteur de faire confiance à une copie qui expédie un argument par récurrence avec des expressions telles que « de proche en proche » ou « par récurrence évidente ». Le jury recommande donc la stratégie traditionnellement enseignée :

- définition de l'hypothèse de récurrence (en précisant par rapport à quelle variable entière) ;
- initialisation ;
- hérédité (même si c'est bien cette partie qui demande le plus d'efforts mathématiques, les deux précédentes ne doivent pas être négligées).

I Fonction caractéristique

Q1. Le jury attendait la mention de l'indépendance des variables aléatoires $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\varepsilon_k 2^{-k}}$ comme conséquence de celle des variables aléatoires ε_k. Il s'agissait d'invoquer le lemme des coalitions. Signalons que dans le cadre du programme, le lemme des coalitions ne permet d'obtenir l'indépendance que de deux fonctions $f(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$ et $g(\varepsilon_{m+1}, ..., \varepsilon_n)$ et non de n fonctions comme demandé. Le jury a néanmoins choisi de ne pas pénaliser ce détail.

Q2. Il s'agit du premier argument par récurrence. Comme signalé plus haut, le jury attendait une rédaction nette.

Q3. Le cas $t = 0$ a souvent été oublié. S'agissant du cas $t \neq 0$, il s'agit de calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin t}{2^n \sin(t2^{-n})}$. L'équivalent $\sin(t2^{-n}) \sim t2^{-n}$ pour $n \to +\infty$ est bien compris. Par contre, la non-nullité du dénominateur $2^n \sin(t2^{-n})$ a très souvent été oubliée (seules 25 % des copies mentionnent ce point). Mentionnons une erreur qui a interpellé le jury dans plusieurs copies : afin d'éviter la nullité du dénominateur, certaines copies ont considéré le cas $t \notin 2^n\pi\mathbb{Z}$ sans se rendre compte que cette condition est automatiquement satisfaite pour n assez grand. De plus, il semble étrange de considérer un cas défini par une condition dépendant de n alors qu'il s'agira de faire varier n par la suite.

Q4. La continuité de la fonction $t \mapsto \operatorname{sinc} t$ est bien traitée dans 66 % des copies même si le jury estime que l'invocation des « théorèmes généraux » est très vague. De plus, bien que la limite $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ soit bien comprise, l'égalité $1 = \operatorname{sinc} 0$ est souvent oubliée.

Q5. Cette question a été globalement mal faite. Dans le cadre du programme, on peut notamment trouver deux approches pour montrer que X_n et $-X_n$ ont la même loi :

- tout d'abord, on peut invoquer le critère qui énonce que la loi est caractérisée par la fonction génératrice. Pour autant, ce résultat du programme ne s'applique que pour des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Cela n'est pas le cas de $X = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\varepsilon_k}{2^k}$ mais l'on peut aisément s'y ramener. Le jury rappelle au passage que la caractérisation de la loi par la fonction caractéristique n'est pas au programme ;
- la façon la plus directe est sans doute de montrer l'égalité $\mathbb{P}(X_n = \alpha) = \mathbb{P}(-X_n = \alpha)$ pour toute valeur de α. Tout d'abord, on a

$$\mathbb{P}(X_n = \alpha) = \sum_{(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\{-1,+1\}^n} \mathbb{P}\big((\varepsilon_1 = \mu_1, \dots, \varepsilon_n = \mu_n) \cap (X_n = \alpha)\big).$$

En notant $U(\alpha)$ l'ensemble des n-uplets $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \{-1, +1\}^n$ vérifiant $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k 2^{-k}$, on déduit la formule

$$\mathbb{P}(X_n = \alpha) = \sum_{U(\alpha)} \mathbb{P}(\varepsilon_1 = \mu_1, \dots, \varepsilon_n = \mu_n).$$

On conclut aisément en invoquant l'indépendance et la symétrie des variables aléatoires ε_k.

Q6. Question globalement bien traitée. En suivant le sujet, la plupart des candidats ont été naturellement amenés à prouver la formule $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tX_n}\right) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_n})$. Pour autant, certaines copies ont invoqué un autre argument en remarquant que la question **Q1** implique que $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_n}\right)$ est réel et donc est égal à sa partie réelle $\mathbb{E}(\cos(tX_n))$.

Q7. Il s'agit de la première question difficile et a été raisonnablement bien traitée dans environ 300 copies. Cette question nécessite une bonne habitude de la notion de convergence uniforme. En l'occurrence, pour nier la convergence uniforme de φ_n vers $t \mapsto \operatorname{sinc}(t)$, une bonne approche est de construire une suite $(t_n) \in (\mathbb{R}^\star)^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\exists\, c > 0, \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \left|\varphi_n(t_n) - \frac{\sin(t_n)}{t_n}\right| \geqslant c.$$

Le choix $t_n = 2^{n+1}\pi$ semble plus ou moins incontournable et donne $\varphi_n(t_n) = \varphi_n(0) = 1$ (par $2^{n+1}\pi$-périodicité) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(t_n)}{t_n} = 0$.

II Écriture binaire

Q8. Nous avons déjà commenté cette question plus haut sur le caractère « bien défini » de la fonction. Concernant la formule $\sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} = 2^n - 1$, sa preuve est globalement bien traitée. Mentionnons toutefois quelques points négatifs :

- le simple fait d'écrire la formule $\sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} = 2^n - 1$ ne suffit pas à convaincre le jury. En effet, cette formule est suggérée par la forme même de l'énoncé. Aussi, il est important de donner un argument convaincant faisant, par exemple, référence à une somme géométrique de raison 2 ;
- afin de montrer l'inégalité $\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \leqslant 2^n - 1$, certaines copies prouvent la formule $\sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} = 2^n - 1$ puis, sans mentionner les inégalités $x_j \leqslant 1$, en déduisent la conclusion ;
- certaines copies contenaient des phrases du type « dans le pire cas, la somme vaut $2^n - 1$ » alors qu'il est bien plus simple d'écrire proprement les inégalités en question.

Q9. Vu la facilité de la question, la simple formule $A_n = \mathrm{Im}(\Phi_n)$ a largement convaincu le jury sans qu'aucune preuve ne soit nécessaire.

Q10. Bien que déjà évoquée plus haut, commentons un peu l'argumentation par récurrence. Si l'on raisonne par rapport à la variable n, il est très facile de prouver l'inclusion $[\![0, 2^n - 1]\!] \subset \mathrm{Im}(\Phi_n)$ puisque l'on a

$$[\![0, 2^{n+1} - 1]\!] = \underbrace{[\![0, 2^n - 1]\!]}_{\subset \mathrm{Im}(\Phi_n)} \cup \underbrace{[\![2^n, 2^{n+1} - 1]\!]}_{= 2^n + [\![0, 2^n - 1]\!]}.$$

Ce qui donne

$$[\![0, 2^{n+1} - 1]\!] \subset \mathrm{Im}(\Phi_n) \cup \big(2^n + \mathrm{Im}(\Phi_n)\big).$$

Or la définition de Φ_n montre l'égalité $\mathrm{Im}(\Phi_{n+1}) = \mathrm{Im}(\Phi_n) \cup \big(2^n + \mathrm{Im}(\Phi_n)\big)$ en distinguant selon que $x_1 = 0$ ou $x_1 = 1$.

Par contre, les copies ayant tenté d'effectuer une récurrence sur k ont eu bien plus de mal (tant sur la forme que sur le fond).

Q11. L'argument attendu est qu'une fonction surjective entre deux ensembles de même cardinal est forcément bijective. Cette situation est familière dans le contexte des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension. Mais l'application Φ_n n'est pas linéaire (puisque ses ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas des espaces vectoriels).

Signalons que beaucoup de copies ont tenté de montrer l'injectivité de Φ_n directement. Vu le contexte de la question et le titre de la partie, l'évocation de l'unicité de la décomposition dyadique d'un nombre entier n'a pas été considérée comme un argument admissible. Très peu de copies ont réussi à redémontrer cette unicité directement.

Q12–Q14. Ces trois questions ont été globalement bien traitées. Le jury rappelle néanmoins que la notion de limite d'ensembles $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n$ n'a pas de définition rigoureuse dans le cadre du programme. Ainsi, il n'est pas raisonnable de justifier l'inclusion $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n \subset [0, 1[$ grâce à l'hypothétique formule $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n = \lim\limits_{n\to+\infty} D_n$. Quelques rares candidats n'ont pas compris que chaque D_n est un ensemble et ont cherché à montrer une inégalité de la forme $D_n \leqslant D_{n+1}$.

Q15. Cette question nécessite une certaine maitrise de la partie entière d'un nombre et a amené aux inégalités strictes $-1 < d_j(x) < 2$ dans la plupart des copies. On conclut ensuite en remarquant que $d_j(x)$ est un entier relatif.

Q16, **Q17**. Ces deux questions ont été globalement bien faites. Néanmoins, certaines copies invoquent la linéarité de Ψ_n.

Q18. Cette question a bien été traitée dans 50 % des copies. Il s'agit de distinguer rigoureusement les cas $k < n$ et $k \geqslant n$. Tout comme à la question **Q14**, le sujet contient une légère erreur typographique concernant le cas $k = 0$ mais aucune copie ne semble avoir été gênée.

III Développement dyadique

Q19. Globalement bien réussie par les candidats ayant atteint cette partie. Elle nécessite l'invocation de la question **Q12** ou **Q17**.

Q20–Q22. Nous avons déjà mentionné que ces questions ont été considérées d'un seul bloc. Elles nécessitent l'utilisation de l'indépendance des variables aléatoires U_n et du caractère bijectif de Ψ_n. Mentionnons que pour la **Q22**, beaucoup de candidats ne rappellent pas que le cardinal de D_n est 2^n (faute de quoi le seul calcul $\mathbb{P}(Y_n = x) = 1/2^n$ n'a pas convaincu le jury de la compréhension de la loi uniforme sur D_n).

Q23. Question très difficile qui est, comme la question **Q5**, un marqueur de la théorie des probabilités. Environ 200 copies ont donné une réponse satisfaisante. Le jury a valorisé les copies qui ont conjecturé que les variables aléatoires V_k sont obtenues comme les coordonnées de $\Psi_n^{-1}(X_n)$. L'indépendance des variables aléatoires V_k ainsi que le calcul de leur loi peuvent directement se déduire de la bijectivité de Ψ_n.

IV Développement dyadique, étude asymptotique

Q24. Environ 33 % des copies ont réussi cette question. L'erreur souvent commise fut d'utiliser les formules de $F_n(x)$ et $G_n(x)$ des questions **Q20** et **Q21**. Or ces dernières ne furent démontrées que sous la condition restrictive $x \in D_n$. Une bonne réponse attendue fut de remarquer que la positivité (presque sûre) de U_{n+1} implique l'inégalité

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} \leqslant x) = \mathbb{P}(Y_n + U_{n+1}2^{-n-1} \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(Y_n \leqslant x).$$

Ainsi, la suite $\left(F_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Q25. Le fait qu'une suite minorée et décroissante est forcément convergente est très bien assimilé par les candidats.

Q26. Cette question a été globalement mal traitée. Tout d'abord le cas $x = 1$ nécessite de remarquer que $F_n(1) = G_n(1) = 1$ (grâce à la question **Q19**). Certaines copies ont maladroitement utilisé la formule de la question **Q20** ce qui a amené à une formule de la forme $\mathbb{P}(Y_n \leqslant 1) = 1 + 1/2^n$, c'est-à-dire une probabilité strictement supérieure à 1 ! S'agissant du cas $x \in D$, le jury attendait une rédaction rigoureuse vis-à-vis de l'intervention de l'entier n. Par exemple, si x appartient à l'union croissante $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$ alors,

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad x \in D_n,$$

si bien que l'on a $F_n(x) = x + 1/2^n$ pour tout $n \geqslant n_0$. On en déduit la limite escomptée pour $n \to +\infty$. Or certaines copies n'ont pas évoqué l'union croissante des ensembles D_n et ont directement calculé la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} (x + 1/2^n)$ sans préciser quel rôle joue n.

Q27. Il s'agit d'une question difficile. La méthode la plus simple est d'invoquer la question **Q13** et la croissance pour l'inclusion des probabilités :

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant \pi_n(x)) \leqslant \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(Y_n \leqslant \pi_n(x) + 2^{-n}).$$

On se ramène ensuite à la question **Q20**. Une autre idée intéressante a été évoquée dans certaines copies, à savoir que l'ensemble D est dense dans $[0,1]$ (ce qui sera abordé dans la question **Q35**). Il est bien possible d'achever la preuve en invoquant la croissance des fonctions de répartition mais cela relève d'un passage fort technique, malheureusement certaines copies ont utilisé à tort la continuité (généralement fausse pour des variables aléatoires discrètes) des fonctions des répartitions.

Q28. Il s'agit d'une question facile mais nécessite un peu de concentration sur les inégalités larges et strictes. En l'occurrence, on a la formule

$$\mathbb{P}(Y_n \in [a,b]) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant b) - \mathbb{P}(Y_n < a) = F_n(b) - G_n(a).$$

Or certaines copies ont maladroitement obtenu $F_n(b) - F_n(a)$. La plupart des candidats ayant abordé cette question ont pensé à traiter les quatre formes d'intervalles.

Q29. Le jury a considéré que cette question est difficile. Surtout que la ligne directrice du sujet suggérait de déduire le résultat à partir de la compréhension du cas des intervalles. On peut effectivement conclure en approximant une fonction continue par des fonctions en escalier afin de prouver la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(Y_n)) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le jury a partiellement valorisé les copies qui contenaient seulement une conjecture de la formule précédente. Le jury a également valorisé les candidats ayant interprété l'espérance $\mathbb{E}(f(Y_n))$ comme une somme de Riemann.

Q30. Beaucoup de candidats n'écrivent pas de formule reliant X_n et Y_n. Par conséquence, l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ a parfois été calculée avec une mauvaise fonction f.

Q31. Question difficile. L'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ est souvent mal justifiée en $t=0$. L'argument le plus simple est de constater la limite $\displaystyle\lim_{t\to0^+} \frac{t-1}{\ln(t)} = 0$, ce qui assure un prolongement continu en $t=0$. Pourtant, beaucoup de copies ont proposé une comparaison avec $1/\sqrt{t}$ au voisinage de $t=0$, à savoir

$$\frac{t-1}{\ln(t)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Dans les copies ayant choisi cette voie de résolution, le jury a choisi de pénaliser l'absence de la mention de la positivité de la fonction de référence $1/\sqrt{t}$.

Le calcul de la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ est rarement effectué, même de façon formelle. Malgré l'indication, peu de copies contiennent une justification de l'intégrabilité de $t \mapsto \mathbb{E}(t^{Y_n})$ sur $[0,1]$.

V Dénombrabilité

Q32. La réponse attendue devait mentionner qu'une union dénombrable d'ensembles finis est une partie finie ou dénombrable. Le jury a été indulgent sur la notion de finitude mais a pénalisé l'oubli du caractère dénombrable de l'union. Une minorité de candidats a court-circuité cette argumentation en remarquant l'inclusion $D \subset \mathbb{Q}$.

Q33. Cette question a bien été traitée dans 50 % des copies ayant abordé la question.

Q34. Bien que cette question fasse partie des dernières questions du sujet, le jury attendait une démonstration nette. En particulier, la preuve de l'injectivité méritait une certaine rigueur d'écriture, par exemple en montrant une double inclusion.

Q35. Comme à plusieurs reprises dans cette épreuve, beaucoup de candidats ont perdu des points sur des absences de justification, notamment sur la convergence de la série et sur l'étude de l'unicité de la décomposition dyadique d'un nombre appartenant à $[0,1]$.

Q36. Sans doute la question la plus difficile du sujet. Bien traitée dans une cinquantaine de copies.

Q37. Une question facile qui fut très bien faite par la quasi-totalité des candidats l'ayant remarquée.

Conclusion

Le jury remarque une augmentation sensible du nombre de copies très mal rédigées en ce sens que ces dernières sont quasiment illisibles. Des candidats ont vraisemblablement perdu de nombreuses places dans ce concours sélectif du fait de la non lisibilité de leurs copies.

Les extraits suivants du rapport 2018 sont toujours d'actualité : « bien qu'une épreuve de concours ait pour but de sélectionner les meilleurs candidats, ces derniers doivent avoir une réflexion quant à la différence de nature entre une épreuve écrite et une épreuve orale. Lors d'une épreuve écrite, il est impossible au correcteur d'interroger le candidat. Il est donc important que les candidats écrivent sur leurs copies les arguments qui leur semblent indispensables. Le jury constate malheureusement que de nombreux candidats de très bon niveau ne détaillent pas leur argumentation. Cela expliquera sans doute la déception de bon nombre de candidats ayant traité beaucoup de questions du sujet. »

Le jury a beaucoup apprécié les copies qui ont avancé de façon presque linéaire et ont proposé des démarches scientifiques et honnêtes sur les questions les plus difficiles. Comme pour les années précédentes, les meilleures copies contiennent une rédaction impeccable de la quasi-totalité des questions et font preuve d'une excellente maitrise du programme.