cette assertion par le symbole $\sum_{n=0}^{\infty} h\Phi(nh)$: on retiendra qu'on a droit à ce symbole que lorsque l'on a établi la convergence de la série ; il suffit de prouver que la suite des sommes partielles de la série est convergente ce qui, dans ce cas, revient à montrer que la suite des sommes partielles est majorée puisque la série considérée est à termes positifs à partir d'un certain rang.

De même contrairement au programme, un grand nombre de candidats parle de règle, de théorème, de critère de d'ALEMBERT pour les séries entières ou invoque l'invariance du rayon de convergence par multiplication par une « fraction rationnelle » en n - en l'occurrence ici la fraction rationnelle n'est autre que $n^{\alpha-1}$ avec $\alpha \in [1, +\infty[$ - pour ramener le calcul du rayon de convergence de la série entière proposée par le texte à celui de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

Des techniques élémentaires ne sont pas acquises : par exemple très souvent la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^{2q}+1=0$ où q est un entier naturel non nul n'est pas effectuée, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^{2p}}{X^{2q}+1}$ n'est pas réalisée.

Le jury ne saurait que conseiller aux futurs candidats :

- de connaître la définition des mots usuels tels que fonctions uniformément continues, fonctions lipschitziennes, fonctions polynomiales… ;
- de maîtriser et de vérifier soigneusement les hypothèses des théorèmes utilisés comme par exemple le théorème de changement de variable dans les intégrales, le théorème d'intégration par parties, le théorème de continuité sous le signe somme… ;
- de justifier les assertions présentées : par exemple, on évitera les assertions du type « la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est dérivable ou continûment dérivable sur l'intervalle $[0,1]$ » en omettant les conditions sur α et β pour qu'il en soit ainsi.

Conclusions

Les candidats doivent s'attacher à présenter des copies lisibles, rédigées de façon claire et précise et de donner des démonstrations en alignant des égalités que l'on agrémente de « bulles » explicatives. Ils doivent respecter l'orthographe d'usage et l'orthographe d'accord. Ils ne doivent pas oublier que si ces divers aspects ne font pas l'objet de points spécifiques dans le barème, ils peuvent entraîner des points de minoration pour les copies ne présentant pas ces qualités.

Mathématiques II

Présentation du sujet

La partie I est centrée sur l'étude du produit de deux endomorphismes autoadjoints positifs d'un espace euclidien. On y établit plusieurs résultats utilisés dans la suite. Elle demande une bonne compréhension du cours sur les opérateurs autoadjoints. La partie II étudie la minimisation de la restriction d'une fonctionnelle quadratique à un sous-espace et introduit la notion de point selle pour une forme pénalisée de ladite fonctionnelle. Elle teste des compétences variées : topologie, calcul différentiel (auquel peut être substitué une approche algébrique), quadriques. La partie III présente, dans le cas d'une fonctionnelle quadratique, l'algorithme de minimisation d'Uzawa et en étudie la convergence.

Analyse globale des résultats

La partie I contient beaucoup de questions faciles, malheureusement souvent mal résolues. Trois questions plus subtiles (I.B.3, I.C.1.c), I.C.3) ont permis de déceler les candidats ayant une certaine autonomie. Les questions II.A.1 à II.A.4 se sont révélées très classantes ; II.A5 a été peu traitée. Beaucoup de candidats ont avancé dans II.B, III.A et III.B1 en admettant les résultats précédents. L'énoncé permettait un certain grappillage, notamment à cause du caractère « fermé » de II.B et de III. Grâce à la diversité des thèmes abordés, il a cependant permis d'étaler les notes de façon satisfaisante. Quelques remarques formelles : l'orthographe doit être correcte, l'écriture facilement lisible, les questions nettement séparées, les résultats mis en évidence. De nombreux candidats ignorent ces règles élémentaires ; les plus négligents ont été pénalisés.

Commentaires sur les réponses apportées

Les commentaires ci-dessous égrènent principalement les ignorances, erreurs et négligences souvent relevées par les correcteurs. Soulignons préalablement que d'assez nombreux candidats ont néanmoins montré dans cette épreuve d'importantes qualités.

La sous-partie I.A, proche du cours, s'est avérée très sélective. Certains candidats ignorent ce qu'est un endomorphisme autoadjoint positif et écrivent sans sourciller : $u(x)\geq 0$. De nombreux autres se placent dans une base propre pour u sans préciser qu'ils la choisissent de plus orthonormée, ce qu'ils utilisent cependant implicitement (calcul de $\langle u(x),x\rangle$, caractère autoadjoint de la racine carrée). De façon générale, on note beaucoup de flou dans le passage des matrices aux endomorphismes. Plus grave, et relativement fréquente, est la tendance à considérer que, si u est diagonalisable, tout vecteur est propre pour u.

Dans la sous-partie I.B, on relève de nombreuses erreurs liées au changement de structure euclidienne ; la restriction de $u\circ v$ à l'image de u n'est pas autoadjointe pour le produit scalaire initial mais pour celui associé à u^{-1}. Un point de vue trop systématiquement matriciel est évidemment préjudiciable dans cette partie, d'esprit géométrique. Par ailleurs, faute de soin dans l'examen des domaines de définition des applications, beaucoup de candidats ne voient pas que $u_1^{-1} \circ u(x)$ n'est égal à x que pour x dans l'image de u. Enfin, les arguments de stabilité de sous-espaces, certes simples ici, sont rarement mentionnés.

La question I.C.1.a) adapte la construction de l'endomorphisme adjoint au cas d'une application linéaire entre deux espaces euclidiens ; les candidats ayant compris le cours afférent y apportent des réponses satisfaisantes, les autres sont souvent vagues (les raisonnements matriciels utilisant la transposée ne sont probants qu'à condition de se placer explicitement dans des bases orthonormées), ou incomplets (preuve de la seule unicité). La question I.C.1.b) généralisation à la situation envisagée d'une propriété classique de l'adjoint, est assez souvent résolue ; certaines copies n'établissent cependant qu'une inclusion. La question I.C.1.c) est plus délicate : on peut la résoudre en inversant la restriction de f^* à l'image de f ou par l'emploi d'une base. La plupart des réponses produites suppose a priori la convergence de (z_k). Notons à ce propos qu'une réponse partielle peut être assez largement payée à condition de se présenter comme telle ; en revanche, les fautes de raisonnement et les omissions plus ou moins délibérées d'arguments conduisant à penser que le candidat donne sa solution pour complète sont fortement sanctionnées. Dans l'ensemble I.C.1.d) et I.C.2 ne posent pas de problème. La question I.C.3 est immédiate pour qui se place dans une base de diagonalisation de $a^{-1} \circ f^* \circ f$ orthonormée pour ϕ_a, ce qui nécessite un certain recul ; elle n'est bien résolue que par une poignée de candidats.

La question II.A.1 demande de minorer $\langle a(x),x\rangle$ par $c\|x\|^2$ avec $c>0$ et de majorer $|\langle b,x\rangle|$ par Cauchy-Schwarz. Beaucoup de candidats se montrent ici très peu à l'aise avec les inégalités, certains allant jusqu'à majorer J pour établir le résultat ! De nombreux autres ne savent pas traduire précisément la condition $J(x)\to+\infty$ lorsque $\|x\|\to+\infty$. Le raisonnement très classique utilisé en II.A.2 est souvent mal compris ; il faut certes se restreindre à un compact, mais celui-ci doit être choisi avec un peu de soin (pour que J soit $> J(0)=0$ hors de ce compact par exemple). Le calcul demandé en II.A.3 est souvent faux ou inachevé ; soulignons qu'il est aberrant de produire une expression de $J(x)+J(y)-2J\left(\frac{x+y}{2}\right)$ ne s'annulant pas lorsque $x=y$. Celui de II.A.4.a) est souvent inachevé (résultat non simplifié) ou mal présenté (il est judicieux de présenter le résultat comme trinôme en t). La question II.A.4.b), essentielle pour la suite peut se traiter par un argument de développement limité ou de façon algébrique. Beaucoup de candidats la comprennent en gros, mais peu établissent complètement l'équivalence ; en particulier, les notions de point critique, d'extremum local et d'extremum global sont rarement nettement distinguées. Certains remplacent subrepticement un $a/2$ issu d'un calcul incorrect par un a conduisant au bon résultat ; cette attitude appelle des commentaires analogues à ceux faits à propos de I.B.1.c) et est lourdement pénalisée. Quant à l'intermède géométrique II.A.5, il montre, hélas sans surprise, que peu de candidats prennent le temps de travailler le cours sur les quadriques.

L'implication non triviale de II.B.1 peut être établie directement ou avec un peu de calcul différentiel ; les réponses y sont souvent assez approximatives. En II.B.2, beaucoup de réponses sont incomplètes, l'utilisation des questions précédentes nécessitant ici un peu de soin.

La suite du problème, s'est révélée nettement moins révélatrice et il n'est pas utile de l'analyser plus précisément.

Conclusion

C'est un travail approfondi sur le cours (connaissance des théorèmes, de leurs démonstrations et applications immédiates) qui constituait sans aucun doute la meilleure préparation à cette épreuve, comme d'ailleurs à la plupart des sujets de concours. Conseillons donc aux candidats de travailler davantage dans ce sens, sans perdre de vue l'importance de la forme soulignée dans le second volet de ce rapport.

Sciences physiques

Physique

Présentation du sujet

Ce problème se propose de mettre en place quelques éléments de cosmologie. La première partie porte sur la déviation de la lumière par une étoile sur la base d'une analogie mécanique. L'instabilité d'un amas d'étoiles et la loi de Hubble permettent d'aborder progressivement des modèles d'évolution de l'Univers en dernière partie. De longueur raisonnable, ce sujet aborde des notions du cours de première et de seconde année.