

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} q(t) \cos(2\sqrt{\lambda} t) dt = 0$$

C. Très peu de candidats remarquent que les fonctions $x \mapsto -\theta(\lambda, -x)$ et $x \mapsto \theta(\lambda, x + 2\pi) - 2k\pi$ sont solutions de (T_λ) pour obtenir les égalités demandées.

Partie IV

Cette partie a été abordée par de nombreux candidats par le biais des questions (A.1.) qui ont été traitées avec des fortunes diverses. À partir de là, à l'exception de la question (A.2.b.), le reste n'a pas été traité sauf dans quelques copies exceptionnelles.

Partie V

Cette dernière partie, abordée par presque tous les candidats, n'a pratiquement pas rapporté aucun point vu le traitement infligé par exemple à la double inégalité

$$a < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t) dt < b.$$

Ici, les manipulations effectuées montrent que malheureusement beaucoup de candidats ne maîtrisent pas un énoncé aussi simple que celui qui est sous-jacent à la demande du texte.

Conclusion

Pour terminer, on peut donc conseiller aux futurs candidats de lire attentivement le sujet qui leur est proposé en retenant tout au long de l'épreuve les hypothèses et les propriétés mises en jeu dans l'énoncé - ici, on aurait pu éviter des déconvenues si l'on n'oubliait pas que E_2 est le sous-espace vectoriel des fonctions 2π -périodiques impaires de classe \mathcal{C}^2 - de connaître et comprendre les notions de base ainsi que les énoncés importants, de maîtriser les divers outils, de savoir conduire un calcul, de mettre en place des stratégies simples permettant de répondre à une question. Cela, joint à des considérations matérielles rappelées plus haut, devrait permettre de répondre de façon satisfaisante aux diverses exigences présentées par un problème.

Mathématiques II

Présentation du sujet

Le sujet est consacré à la décomposition LU des matrices carrées. Cette décomposition a de nombreuses applications, principalement en algorithmique matricielle puisqu'elle ramène la résolution d'un système de CRAMER à deux résolutions successives de systèmes de CRAMER triangulaires, mais elle a aussi des applications théoriques : on peut entre autres en déduire l'existence de la décomposition de CHOLESKY d'une matrice symétrique réelle définie positive ainsi que de nombreux calculs de déterminants, tels celui dont le terme général est PGCD(i, j).

L'existence de cette décomposition n'est pas automatique, mais elle est *génériquement* vérifiée pour une matrice carrée inversible (plus précisément, l'ensemble des matrices réelles possédant une décomposition LU est un ouvert dense dans $GL_n(\mathbb{R})$). Elle est en outre *unique* pourvu que l'on impose par exemple à la matrice L d'être *unipotente*.

Une condition nécessaire et suffisante d'existence de la décomposition est la non-nullité des déterminants mineurs emboîtés. Lorsqu'elle est satisfaite, la détermination effective des matrices L et U revient en fait à la méthode du pivot de Gauss, avec la propriété supplémentaire que les pivots se trouvent tous sur la diagonale.

Analyse globale des résultats

Le niveau des copies s'est révélé extrêmement disparate : dans certaines, on trouve la preuve de la maîtrise que l'on est en droit d'attendre de candidats confrontés à des questions dans l'ensemble élémentaires ; dans beaucoup d'autres, on trouve au contraire les marques d'une souffrance constante, conséquence d'un manque évident de recul.

Cette lacune se constate à tous les niveaux du problème ; à titre d'exemple, peu de candidats ont su traiter en un minimum de calculs le **II.C1** qui ne demandait après tout que de reconstituer la matrice d'une forme quadratique dont une expression « analytique » était donnée. En d'autres termes, il était permis, voire conseillé, de démontrer que $B=A$ pour établir que $A=B$.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

La première partie, intitulée *Méthode de Gauss et factorisation*, consistait principalement en la mise en œuvre de cette méthode, et en la description matricielle des opérations élémentaires qu'elle nécessite. Bien que très proche du cours de première année et ne présentant aucune difficulté particulière, elle a été ressentie comme trop lointaine par de nombreux candidats qui, de ce fait, l'ont délaissée pour passer rapidement aux deux suivantes. D'autres, assez nombreux également, y ont au contraire glané l'essentiel de leurs points mais souvent au prix de calculs laborieux, faute d'une hauteur de vue suffisante.

Il est courant de lire dans les copies *qu'un déterminant ne change pas lorsque l'on effectue une combinaison linéaire de ses colonnes*. Outre le fait que cette formulation est très vague, elle ne fait pas apparaître que l'opération « licite » revient à additionner à une colonne une combinaison des autres colonnes.

Les algorithmes demandés ont été très souvent ignorés, peut-être parce que les candidats n'étaient pas convaincus du caractère rémunérateur de ceux-ci. Parmi ceux qui s'y sont risqués, beaucoup (surtout au **I.A1**) font un contresens total en pensant que donner un algorithme revient à exposer un vague principe, tel que *on calcule les composantes de proche en proche*. Au moins, ces candidats n'auront pas consacré un temps précieux pour obtenir *in fine* un résultat nul.

Le jury a constaté avec plaisir que, dans un certain nombre de copies, les algorithmes et les calculs de complexité sont commentés de façon constructive et intelligente. À l'adresse de ceux qui ont estimé peu efficace une méthode de résolution de systèmes linéaires dont la complexité est quadratique, nous rappelons que c'est effectivement le cas pour une méthode de tri, mais qu'il semble difficile de faire mieux dans le cas présent.

La deuxième partie, *Applications et cas particuliers*, aborde le cas particulier des matrices *tridiagonales*, puis, à titre d'exemple, celui de la matrice A_n que l'on rencontre notamment dans la discrétisation d'équations différentielles du second ordre.

Ici, c'est implicitement par la vérification des conditions de SYLVESTER que l'on établit la propriété des mineurs emboîtés ; cela donnait l'occasion d'un détour par la notion de *matrice définie positive*, dont l'assimilation a d'ailleurs laissé aux correcteurs une impression mitigée. Mis à part cette utilisation de l'Algèbre bilinéaire, le reste de la partie ne requerrait que les bases du calcul matriciel.

La troisième et dernière partie, **Une méthode itérative**, envisageait la résolution itérative du système linéaire de la partie **II**. Souvent constaté dans les copies, le recours au *théorème du point fixe*, hors programme d'ailleurs, était bien inutile dans une situation où l'existence du dit point fixe était préalablement acquise. L'exemple pris en compte avait l'avantage d'être simple, mais la norme subordonnée de la matrice de l'itération était trop proche de 1 pour que la méthode soit algorithmiquement efficace. Cette partie recelait une question plus difficile, mais que l'on pouvait admettre sans inconvénient ; ce **III.A3a** n'a été traité que dans moins de vingt copies.

Pour le reste, une bonne compréhension des notions de Topologie était requise. Les erreurs les plus fréquentes ont consisté à écrire $\|Ax\| = \|A\| \cdot \|x\|$ et, par voie de conséquence, $\|A^k\| = \|A\|^k$.

Mis à part les constatations, hélas habituelles, quant à la présentation ou à l'orthographe déplorables de maintes copies, les correcteurs ont noté cette année l'apparition de nouvelles dérives : la désinvolture consistant à ne plus numéroté les questions, la propension à répondre à côté des questions posées, notamment dans les calculs de complexité où certains pensent pouvoir se limiter à un ordre de grandeur¹, la naïveté de proclamer évidentes des questions dont l'énoncé donne explicitement la réponse, le flou savamment entretenu quant au signe des sommes du **II.C1**, qualifiées de *positives* alors qu'il était crucial de préciser *strictement* et *non au sens large*². Les candidats doivent savoir que de tels comportements ne sont pas appréciés du jury.

Conclusions

Qu'il nous soit enfin donné l'occasion de rappeler que le programme des épreuves de Mathématiques est la *réunion* de ceux des deux années de classes préparatoires et que toute stratégie contraire, qu'elle résulte de l'ignorance ou d'un pari, est éminemment risquée. Le problème de cette année en est la preuve.

¹ Bien entendu, on ne peut nier que les informaticiens s'intéressent surtout à une estimation de la complexité. Il n'en demeure pas moins que l'énoncé attendait un calcul précis.

² Il est piquant de remarquer que des candidats qui abusent tout au long de leur copie d'abréviations et de symboles sténographiques de toute sorte sont capables d'écrire *positive* en toutes lettres lorsqu'il s'agit précisément d'éviter de trancher entre \geq et $>$.