

Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet de Maths 1 de la filière PSI 2023 a pour objectif l'étude d'endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le rang, le déterminant, la trace ou le polynôme caractéristique.

Le problème est constitué de cinq parties comportant de nombreuses questions indépendantes des parties précédentes :

- une première partie vise à faire démontrer des résultats du cours de PSI ;
- une deuxième partie permet de mettre en évidence des propriétés de certains endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- une troisième partie amène les candidats à démontrer que toutes les matrices ayant le même rang sont équivalentes à $J_{n,r}$;
- une quatrième partie a pour objectif de déterminer les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le rang ;
- une cinquième et dernière partie s'attache à déterminer les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le déterminant ou le polynôme caractéristique.

Il était attendu des candidats qu'ils maîtrisent bien leur cours d'algèbre linéaire pour traiter ce problème : propriétés de la trace, du déterminant, du rang, manipulations de matrices et de leurs puissances, définition d'une valeur propre, conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité par exemple. Le problème nécessitait également de prendre du recul vis à vis des objets manipulés afin de ne pas confondre des éléments appartenant à des ensembles tels que $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$... Enfin, dans la toute dernière partie, une question portait sur la notion de produit scalaire.

Analyse globale des résultats

La première partie, qui demandait la démonstration de résultats de cours ou de questions très classiques, n'a pas été réussie dans l'ensemble. Par exemple, les candidats ayant essayé de répondre à la première question l'ont fait de manière imprécise en évoquant vaguement une formule de changement de base.

La deuxième partie a été bien mieux réussie, avec de nombreux arguments intéressants. On peut juste regretter, dans de nombreuses copies, la confusion des objets manipulés, par exemple des égalités fausses du genre $\Gamma = \Gamma_A$ ou $\Gamma_A = \Gamma_A(M)$. Des réponses très pertinentes ont toutefois été fournies sur de nombreuses copies.

La troisième partie a également été abordée par de nombreux candidats, mais avec moins de réussite que la partie précédente. Plusieurs candidats ont considéré que $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont en somme directe, ce qui n'est pas toujours vrai. Précisons que la question 25 était difficile : une tentative de recherche cohérente a été valorisée même si elle n'aboutissait pas.

Les premières questions de la quatrième partie ont été dans l'ensemble bien traitées, mais peu de candidats ont correctement abordé la fin de cette partie, bien plus technique.

La cinquième et dernière partie a été très peu abordée, les candidats n'ayant sans doute pas eu le temps d'arriver jusque là.

Concernant la présentation des copies, une majorité est assez clairement présentée, avec des questions numérotées correctement, traitées dans l'ordre et des résultats encadrés. Ceux qui dérogent à ces règles de base font tout de suite mauvaise impression et prennent le risque d'être moins bien compris par les correcteurs.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite insister sur un certain nombre de points qui ont souvent posé problèmes aux candidats.

- Les candidats doivent faire un effort de présentation des copies, numéroté les questions, les traiter dans l'ordre (quitte à laisser des blancs pour y revenir) et encadrer leurs résultats.
- L'utilisation des abréviations doit être limitée : si certaines (CNS, SSI...) sont très couramment utilisées, d'autres (SRS pour « scindé à racines simples », par exemple) le sont nettement moins. De même, l'emploi d'abréviations telles que $\forall$, $\Leftrightarrow$ doit être modéré dans des explications, et ces symboles ne doivent figurer que dans des assertions ne contenant que des symboles mathématiques.
- Un raisonnement doit être articulé avec des mots clés (considérons, or, donc, car, en effet) : les hypothèses et les objectifs doivent être clairement identifiés.
- Lorsqu'une égalité entre deux ensembles est demandée et qu'un raisonnement par « double inclusion », est choisi, il est important de bien démontrer les deux inclusions, ou à défaut, de signaler que l'une d'entre elles est évidente si tel est le cas.
- Pour démontrer une équivalence entre deux propriétés, on peut raisonner directement par équivalence, ou raisonner par double implication. Mais montrer une seule implication ne suffit pas.
- À moins d'être évidente, une récurrence doit être correctement rédigée avec la présentation de la propriété à démontrer, la démonstration de l'initialisation, puis de l'hérédité, puis la conclusion.
- Les propriétés du rang ne sont pas toujours bien connues. En particulier, le rang n'est pas linéaire. De même, il n'y a pas d'égalité dans le cas général entre $rg(AB)$ et $\min(rg(A), rg(B))$, ni non plus entre $rg(AB)$ et $rg(A) \times rg(B)$.
- De la même manière, les propriétés du déterminant ne sont pas toujours bien maîtrisées : rappelons que le déterminant n'est pas une application linéaire, et que ce n'est pas une application injective !
- L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas intègre : cela signifie que si A et B sont deux matrices, le produit AB peut être nul alors que $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
- Dans la question 4, lorsqu'on donne la définition d'un vecteur propre, il ne faut pas oublier d'écrire que celui-ci doit être non-nul.
- Dans la question 5, pour démontrer qu'une application est linéaire, il n'est pas nécessaire de démontrer qu'elle envoie le vecteur nul sur le vecteur nul.
- Dans la question 10, on constate que les théorèmes du cours relatifs à la diagonalisabilité d'une matrice ne sont pas toujours bien connus. En particulier, le résultat qui prétend que « A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé et à racines simples », est faux !
- Dans la question 14, il ne faut pas parler de la réciproque d'un endomorphisme avant d'avoir justifié que celui-ci est bijectif.
- Dans la question 19, dire que deux ensembles sont disjoints signifie que leur intersection est vide (et pas qu'elle est réduite au vecteur nul).

- Dans la question 21, la définition de la liberté d'une famille n'est pas toujours bien connue.
- Dans la question 26, la matrice d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$!
- La question 45 est très classique mais les réponses lues dans les copies ne sont pas toujours à la hauteur. Par exemple, la réponse « elle est linéaire par linéarité de la trace », n'est évidemment pas suffisante. De même, la preuve de $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ n'a pas toujours été bien faite.
- Dans la question 46, elle aussi très classique, les 4 points de la définition d'un produit scalaire n'ont parfois pas été démontrés correctement. En particulier, la positivité du produit scalaire ne signifie pas que $\text{Tr}(AB) \geq 0$ pour toutes les matrices A et B .

Conclusion

Le sujet était plutôt long mais de nombreux thèmes d'algèbre linéaire étaient utilisés et tous les candidats ont ainsi pu traiter de multiples questions et mettre en évidence leurs compétences. Quelques lacunes sur des notions de base ont malheureusement aussi été repérées.

De nombreux candidats ont su montrer leur maîtrise du langage mathématique en général, et plus spécifiquement des points qui étaient nécessaires pour aborder les diverses parties de ce problème : manipulation des endomorphismes, des matrices, de la réduction. Quelques candidats ont même abordé avec succès les questions plus difficiles qui parsemaient le sujet, et les correcteurs tiennent à les en féliciter.

Les correcteurs ont toutefois constaté cette année dans trop de copies une maîtrise trop approximative de la rédaction (logique, double implication, récurrence...). Les candidats concernés, même si les idées générales de leurs réponses sont correctes, prennent le risque d'être pénalisés. Inversement, les copies qui proposent une rédaction agréable à lire en mêlant rigueur, justesse et clarté, ont plus de chance d'être notés favorablement par les correcteurs. Il est vivement conseillé aux candidats d'utiliser un brouillon et de ne pas commencer systématiquement la rédaction aussitôt l'énoncé lu. De nombreuses erreurs grossières pourraient ainsi être évitées.