

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Le sujet de mathématiques 1 de la filière PSI 2019 porte sur de l'analyse combinatoire. Une introduction historique permet de comprendre la motivation de ce sujet et son lien avec la recherche mathématique actuelle. Il s'agit d'étudier différentes méthodes de tirages dans des urnes, qui peuvent modéliser la propagation d'épidémies.

Ce problème est constitué de cinq grandes parties :

- une première partie dont l'objectif est d'établir deux résultats d'analyse utilisés dans le reste du problème ;
- une deuxième partie visant à étudier un cas particulier d'urnes qui sera généralisé dans la partie IV ;
- une troisième partie qui introduit la méthode récente du mathématicien français Philippe Flajolet ;
- les quatrième et cinquième parties qui étudient deux protocoles différents de tirages.

L'étude des urnes de Pólya est un sujet fréquemment rencontré par les étudiants de CPGE. Il s'agit d'effectuer des tirages successifs dans une urne constituée de boules de deux couleurs différentes. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, accompagnée par une ou plusieurs boules (qui peuvent être de la même couleur que la boule tirée, ou éventuellement des deux couleurs). On étudie alors l'évolution de la composition de l'urne.

Une bonne maîtrise du chapitre sur les séries de fonctions (cas général ou séries entières) était indispensable pour traiter correctement ce sujet. Il était également attendu des candidats qu'ils maîtrisent les rudiments des probabilités discrètes (décrire un événement, manipuler des probabilités conditionnelles, appliquer la formule des probabilités totales). Enfin, quelques autres chapitres (polynômes, fonctions à plusieurs variables, dénombrement, développements limités) entraient également en jeu.

## Analyse globale des résultats

La première partie a été abordée presque entièrement par tous les candidats, et certaines questions ont été très bien traitées. En revanche, le cours n'est pas toujours bien appris et certains théorèmes, pourtant très importants, ne sont pas cités correctement (théorème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire du premier ordre, produit de Cauchy de deux séries entières...).

La deuxième partie a aussi été très largement étudiée. Beaucoup de très bonnes réponses ont été proposées, mais la rigueur mathématique était parfois absente dans les explications. Rappelons que les questions portant sur les probabilités méritent d'être traitées avec autant de soin que celles d'analyse ou d'algèbre.

La troisième partie, plus longue, a également été abordée par un grand nombre de candidats, mais on peut remarquer que beaucoup moins de questions ont été correctement traitées. Cela s'explique sans doute par une plus grande abstraction ou technicité des questions qui y figuraient, et aussi par sa position en seconde moitié du problème.

Les quatrième et cinquième parties ont été nettement moins abordées.

Concernant la présentation des copies, une majorité est assez clairement présentée, avec des questions numérotées correctement, traitées dans l'ordre et des résultats encadrés. Ceux qui dérogent à ces règles de base font tout de suite mauvaise impression et prennent le risque d'être moins bien compris par les correcteurs.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite insister sur un certain nombre de points qui ont souvent posé problèmes aux candidats.

- Les candidats doivent faire un effort de présentation des copies, numérotter les questions, les traiter dans l'ordre (quitte à laisser des blancs pour y revenir) et encadrer leurs résultats.
- L'utilisation des abréviations doit être limitée : si certaines (CNS, SSI...) sont très couramment utilisées, d'autres (FPT pour formule des probabilités totales...) le sont nettement moins.
- Un raisonnement doit être articulé avec des mots clés (considérons, or, donc, car, en effet) : les hypothèses et les objectifs doivent être clairement identifiés.
- Lorsqu'une question propose de démontrer une formule qui est proposée, il ne s'agit pas simplement de recopier la dite formule : un minimum de justifications est attendu !
- Les questions doivent être lues avec plus d'attention, par exemple, « Montrer qu'il existe un unique... » ne demande pas seulement de prouver une existence.
- Beaucoup de candidats confondent polynômes et séries.
- Il ne faut pas confondre les ensembles  $[a, b]$  et  $\llbracket a, b \rrbracket$ .
- La notion de système complet d'événements n'est pas toujours bien maîtrisée : rappelons qu'il s'agit d'un ensemble d'événements (et pas de probabilités) dont l'une des caractéristiques est d'avoir une union égale à  $\Omega$ .
- Le produit de Cauchy de deux séries entières  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$  est la série  $\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$  et non pas  $\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) x^n$  comme cela a été lu dans de nombreuses copies.
- Lorsque  $|x| < 1$ , la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$  n'est pas égale à  $\frac{1}{1-x}$  !
- La formule des probabilités totales doit s'utiliser en commençant par donner le système complet d'événements choisi.
- Rappelons qu'une série entière est de classe  $C^\infty$  sur son intervalle ouvert de convergence. Il est dommage de revenir aux théorèmes généraux sur les séries de fonctions.
- La règle de d'Alembert est souvent utilisée, mais parfois de manière imprécise : on doit regarder la limite d'un quotient (et pas seulement le quotient lui-même).
- Lorsque la loi d'une variable aléatoire est demandée, une réponse du genre «  $X$  suit une loi uniforme », est incomplète : le paramètre de la loi doit impérativement être donné.

## Conclusion

Le sujet était long mais le grand nombre de parties, la progressivité du texte, et la diversité des chapitres mathématiques nécessaires (probabilités, séries entières...), ont permis à tous les candidats de traiter de nombreuses questions et de mettre en évidence leurs compétences. Quelques lacunes sur des notions de base ont malheureusement aussi été repérées.

Les correcteurs encouragent vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction aussitôt l'énoncé lu. De nombreuses erreurs grossières pourraient ainsi être évitées. De même, quelques exemples simples vus tout au long de l'année donneraient aux candidats des idées élémentaires permettant de comprendre de nombreuses questions et d'en mesurer la difficulté.