Mathématiques 1

Présentation du sujet

Cette année, le sujet proposait l'étude d'un processus aléatoire pouvant servir, entre autre, à modéliser le développement d'une population. Il était constitué de 5 parties. La première était consacrée à l'étude d'une suite récurrente et les 4 autres à l'étude de variables aléatoires et de processus stochastiques.

Ce sujet, respectueux du programme de probabilité, n'en était pas moins délicat pour une première apparition des probabilités au concours. Dès le début de la partie 2 apparaissent un « temps d'arrêt » et un « processus arrêté », notions non triviales pour des élèves ne les ayant jamais rencontrées.

En revanche la première partie portait sur des notions vraiment classiques d'analyse, notamment sur la convergence de suites et de séries numériques.

Analyse globale des résultats

Ce qui a le plus marqué les correcteurs est le nombre très important de candidats ne maitrisant pas les notions de base d'analyse. Les erreurs commises dans des études de suites ou de séries montrent que des questions très simples d'analyse suffisent à distinguer les élèves ayant compris leur cours. À titre d'exemple, environ la moitié des candidats se trompe dans l'étude de la monotonie d'une suite récurrente et 90 % n'arrivent pas à montrer l'existence du minimum d'un ensemble.

Plus généralement, les mauvaises stratégies consistent à faire des calculs sans justification ou bien à écrire des généralités avec quelques mots clés mais sans aucune précision. Il est tout de même attendu des candidats de savoir rédiger une démonstration et de vérifier les hypothèses des théorèmes.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Nous présentons ici une liste des erreurs les plus usuelles commises par les candidats. Elles ont été malheureusement rencontrées trop souvent. Le plus inquiétant est qu'elles concernent les notions de base du cours d'analyse avant même les points les plus subtils de probabilités.

- Pour l'étude de la suite récurrente, le théorème du point fixe était inutile. Il aurait, de toute façon, fallut se souvenir de ses hypothèses. En revanche, la continuité de la fonction f dans l'étude de $u_{n+1} = f(u_n)$ est fondamentale mais est presque toujours ignorée.
- Une suite convergente n'est pas nécessairement stationnaire.
- La convergence (même vers 0) du terme général d'une série ne suffit pas à prouver la convergence de cette dernière.
- Si on fait tendre n vers l'infini, la limite ne peut pas dépendre de n !
- Les équivalents sont souvent mal maitrisés. Si deux suites sont équivalentes, leurs exponentielles ne le sont pas nécessairement. On n'a pas toujours un équivalent à u_{n+1}. On ne peut pas sommer des équivalents sans justification.

- Le critère de d'Alembert est souvent mal appliqué (oubli des valeurs absolues et de la limite).
- On ne peut pas dériver une égalité (en l'occurrence $f(x) = x$) valable en un point isolé. Si on utilise un taux d'accroissement, il ne faut pas oublier de passer à la limite.
- Une grande majorité des candidats pensent qu'une partie non vide minorée admet un minimum alors qu'il est vraiment facile de trouver des contre-exemples.

Notons que les candidats ayant pensé à faire quelques schémas auront trouvé des idées de résolution intéressantes. Bien sûr, il faut ensuite les rédiger proprement.

Étonnamment, les parties sur les probabilités n'ont pas entrainé plus d'erreurs même si leur difficulté a souvent bloqué les élèves :

- il ne faut surtout pas croire que la linéarité de l'espérance permet d'écrire $E(XY) = E(X)E(Y)$;
- écrire $P(X + Y = n) = P(X = n)P(Y = n)$ n'a pas de sens ;
- attention, on peut faire des intersections d'événements, pas de probabilités !

Classiquement, les questions demandant d'établir une formule fermée obtiennent presque toujours une réponse même si tous les moyens, pas toujours rigoureux, sont employés pour l'obtenir. Quant aux questions plus difficiles, les points clés permettant d'y répondre sont très souvent ignorés.

Conclusion

Le sujet de cette année était difficile de par sa longueur et de par la subtilité des questions de probabilités soulevées.

La première partie du problème montre que des notions très simples d'analyse (sur les suites et les séries par exemple) permettent déjà d'identifier les candidats maitrisant les notions de bases des mathématiques et sachant rédiger une démonstration.