

Mathématiques 1

Présentation du sujet

Cette épreuve propose une démonstration du théorème de Perron-Frobenius pour certaines matrices symétriques réelles à coefficients positifs. Une application est proposée en fin de sujet à un théorème dû à Ky Fan.

La partie I est consacrée à des résultats préliminaires présents dans le programme (cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, inégalité de Cauchy-Schwarz) ou nécessitant des calculs tout à fait élémentaires. La partie II est consacrée à la réduction des matrices 2×2 à coefficients strictement positifs, avec un exemple.

La partie III propose l'étude de la notion de rayon spectral pour une matrice complexe et un résultat de convergence associé à cette notion.

Enfin, la partie IV est consacrée à la démonstration du théorème de Perron-Frobenius pour les matrices symétriques réelles à coefficients strictement positifs, puis pour les matrices symétriques réelles dont une des puissances est à coefficients strictement positifs. En toute fin de sujet, un théorème de Ky Fan est proposé en application de ce résultat.

Analyse globale des résultats

Sur les 3501 copies corrigées, la moyenne constatée, en pourcentage du barème, est de 32,9 %, pour un écart-type de 15,1 %, ce qui permet de considérer le sujet comme de longueur raisonnable, et permettant un niveau de discrimination satisfaisant parmi les candidats. La meilleure copie obtient 83,1 % des points du barème total.

Comme nous le verrons plus loin, la sélection des meilleurs candidats s'est essentiellement faite sur deux points : la connaissance (parfois basique) du cours et la qualité du raisonnement, bien plus que sur le volume traité ou l'originalité des idées.

Concernant le premier point, à titre d'exemple, la question **Q21** (dont la réussite s'appuie essentiellement sur la connaissance du théorème spectral), traitée par la quasi-totalité des candidats, n'a été réussie que par une part significativement minoritaire d'entre eux (moins d'un quart).

Quant au second point, le jury rappelle que la gestion des implications et équivalences dans les raisonnements doit se faire avec la plus grande rigueur : de nombreux candidats tentent de résoudre la première partie de la question **Q8** ou la question **Q24** directement par équivalence, un exercice bien périlleux au vu du raisonnement à maintenir de bout en bout. Ces deux questions auront d'ailleurs été le lieu de grandes différences dans la qualité de l'organisation du raisonnement.

Cette année encore, le soin apporté à la qualité des réponses est un facteur plus décisif dans les résultats finaux que la quantité de questions traitées.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Ce sujet se caractérise par une difficulté progressive et la quasi-absence de questions nécessitant une forte prise d'initiative de la part des candidats. Les domaines mathématiques concernés par ce sujet se concentrent essentiellement autour de l'algèbre bilinéaire et de la réduction des matrices symétriques réelles. La partie III, néanmoins, offre une incursion dans le domaine de la topologie des espaces vectoriels

normés. Peu de candidats auront traité l'application proposée en fin de sujet, consacrée à un théorème de Ky Fan sur le spectre des matrices à coefficients strictement positifs.

Le jury a relevé un certain nombre de points généraux dans la correction des copies, et en tire les recommandations suivantes.

- Le jury note **des faiblesses importantes et largement répandues sur des points de cours élémentaires**. L'expression du coefficient général d'un produit matriciel (**Q1**), l'inégalité de Cauchy-Schwarz (**Q2**) et le théorème spectral (**Q21**) sont des résultats centraux encore connus avec trop peu de précision par les candidats.
- **Un enchaînement de calculs ou de symboles logiques ne peut constituer une réponse à part entière**. Le jury relève une proportion importante de copies présentant presque systématiquement les réponses de cette manière, avec un maniement souvent bancal des symboles logiques élémentaires (implications, équivalences en particulier), utilisés, à tort, comme des abréviations. Le jury encourage les futurs candidats à davantage rédiger, à subordonner leurs calculs et enchaînements logiques à un texte constitué.
- **Les variables utilisées par les candidats sont loin d'être systématiquement déclarées**. Il n'est pas rare de voir apparaître des indices, des vecteurs colonnes ou des matrices, au milieu d'un raisonnement, sans en avoir constaté la moindre déclaration préalable, laissant au lecteur le soin de comprendre dans quel ensemble ces variables se trouvent, ou ce qu'elles désignent. Par exemple, le début de la partie IV (questions **Q23** à **Q26**) demande aux candidats d'introduire leurs propres notations pour cheminer vers le résultat attendu, elles n'auront que très rarement été proprement mises en place.

Le jury rappelle également que les **fautes d'orthographe**, malheureusement nombreuses dans cette épreuve, nuisent au discours et laissent au lecteur une impression négative qui peut se répercuter, consciemment ou non, sur la note finale (en plus de faire l'objet d'un malus). En particulier, les fautes d'accord, très nombreuses et quasi-systématiques dans bon nombre de copies (citons le malheureusement très fréquent « théorème spectrale »), interrogent quant à l'idée que certains candidats se font de la structure d'une phrase.

D'une manière générale, le jury note de manière importante **des inversions entre conclusions et hypothèses**. Par exemple, dans les questions **Q3** et **Q4**, beaucoup de candidats seront partis de la conclusion à démontrer, pour la démontrer. Supposer que z est un réel positif pour partir de $1+|z| = |1+z|$ et découvrir qu'alors z est un réel positif n'est pas une réponse admissible à la question **Q3**. Ce mode de raisonnement, fondamentalement incorrect, est rencontré à divers endroits du sujet et dans des proportions importantes parmi les candidats.

Voici désormais les remarques du jury, question par question.

- **Q1** : une question de calcul élémentaire, plutôt bien réussie. Les erreurs constatées ont porté majoritairement sur la confusion entre $X > 0$ (toutes les composantes de X sont strictement positives) et $\exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket, X_i > 0$. On note également de nombreuses versions incorrectes du coefficient général d'un produit matriciel, ainsi qu'une confusion entre AB et son coefficient $AB[i, j]$.
- **Q2** : l'inégalité est mal connue dans de larges proportions (et la valeur absolue est par ailleurs souvent oubliée, dans la version $|\langle X, Y \rangle| \leq |X| \cdot |Y|$). Le jury rappelle que l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ce n'est pas l'orthographe de l'inégalité, d'autant plus qu'elle est donnée dans le sujet) ne s'applique pas à des vecteurs à composantes complexes.
- **Q3** : le jury note de nombreuses erreurs dans la première partie de la question, en raison d'une gestion approximative des modules dans les égalités. Pour cette question, on s'étonne de ne pas avoir

le succès escompté sur un résultat pourtant explicitement au programme (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire).

- **Q4** : une question souvent abordée, mais très rarement réussie. L'organisation d'un raisonnement par récurrence sur cette question-ci a posé d'importantes difficultés au plus grand nombre.
- **Q5** : une question globalement bien réussie, et pour laquelle les erreurs se sont essentiellement concentrées sur des fautes de calcul élémentaires (signe, oubli d'un coefficient 2 ou 4).
- **Q6** : une question globalement bien réussie.
- **Q7** : de trop nombreux candidats pensent conclure en obtenant $|\lambda| \leq \mu$, alors qu'une inégalité stricte était attendue (quand il ne s'agit pas d'une confusion pure et simple entre les deux types d'inégalités). L'examen de la trace, parfois judicieusement effectué, permettait de conclure.
- **Q8** : établir proprement l'équivalence demandée en première partie de cette question aura posé d'importantes difficultés à la majorité des candidats. Les bonnes réponses sont celles qui auront fait preuve d'organisation dans le raisonnement (disjonction de cas selon la valeur de μ , ou séparation des deux implications). Dans la seconde partie de la question, les candidats confondent souvent L et la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors qu'elles ne sont que semblables.
- **Q9 et Q10** : dans la première partie de la question **Q9**, les candidats oublient de citer avec précision la stricte positivité des paramètres α et β dans leur raisonnement. Les calculs attendus dans les deux questions auront été rarement couronnés de succès.
- **Q11** : il ne faut pas oublier d'établir les propriétés définissant une norme (positivité, séparation, homogénéité positive et inégalité triangulaire). Le jury note de nombreuses approximations dans la gestion des opérations de maximum pour la sous-multiplicativité de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Enfin, la question **Q1** est parfois utilisée en référence, à tort.
- **Q12** : très peu de bonnes réponses, intégrant correctement l'inégalité de Cauchy-Schwarz démontrée en question **Q2**. Il est inutile de redémontrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme : l'énoncé demande explicitement de l'admettre. Fait surprenant : on lit de nombreuses fois l'erreur $AB[i, j] = A[i, j]B[i, j]$ même lorsque le calcul a été fait correctement en question **Q1**.
- **Q13** : comme en **Q11**, il ne faut pas oublier d'établir les propriétés d'une norme.
- **Q14** : le jury note de manière récurrente l'erreur consistant à penser que toute matrice complexe est diagonalisable.
- **Q15** : cette question est convenablement traitée à chaque fois que la trigonalisation de A est bien établie, ainsi que le calcul de A^k .
- **Q16** : il ne faut pas oublier de préciser que $N(H) \neq 0$ (voire $N(H) > 0$) avant de diviser dans l'inégalité $N(A)N(H) \leq \rho(A)N(H)$. La matrice H est parfois traitée comme un vecteur propre, ce qui rend l'écriture $N(H)$ vide de sens.
- **Q17** : le calcul a été globalement réussi dans les copies.
- **Q18 à Q20** : questions assez peu réussies, demandant un effort de synthèse précis et organisé, à partir des questions précédentes (c'est-à-dire une prise de recul sur la stratégie de la démonstration engagée). Il s'agit en particulier de bien comprendre la dépendance entre les diverses variables introduites précédemment (la norme N , le réel ε , l'entier k). Peu de copies parviennent à produire un raisonnement correct.

- **Q21** : une question de cours, globalement bien réussie, aux points près suivants *primo*, le théorème spectral s'applique à des matrices symétriques *réelles*, *secundo*, l'information attendue sur les sous-espaces propres est leur orthogonalité deux à deux. Les réponses correctes auront tout de même été valorisées.
- **Q22** : le caractère diagonalisable de A est un argument décisif pour affirmer que $\rho(A) = 0$ implique $A = 0$ (on notera que l'égalité $\rho(A) = 0$ est vérifiée aussi par les matrices nilpotentes). Attention à ne pas confondre la notion de matrice positive définie dans l'énoncé (c'est-à-dire à coefficients positifs) et la notion usuelle de matrice symétrique positive (c'est-à-dire vérifiant $X^\top AX \geq 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$).
- **Q23** : le calcul de $X^\top AX$, pourtant classique, a été très peu réussi, notamment parce qu'il s'agissait de mettre en place des notations adaptées. L'écart entre les candidats sur ce point s'avère important.
- **Q24** : le traitement de l'équivalence attendue est très disparate dans les copies, le jury note majoritairement un manque d'organisation dans le traitement des différents aspects de la question. Le sens rétrograde est globalement traité avec succès. L'erreur $XX^\top = 1$ est fréquente : l'objet $XX^\top$, matrice carrée de taille n , est à ne pas confondre avec le produit scalaire $X^\top X$ (qui, lui, vaut 1 pour X unitaire).
- **Q25** et **Q26** : la référence aux questions précédentes est rarement établie avec précision, en particulier la vérification du caractère unitaire des vecteurs auxquels on applique les résultats des questions **Q23** et **Q24** (le vecteur $|X\rangle$ en **Q25** par exemple). En **Q26**, les confusions entre plus grande valeur propre et valeur propre de plus grande valeur absolue (rayon spectral) sont fréquentes. Enfin, il ne faut pas prêter à la notation $|X\rangle$ les mêmes propriétés qu'à la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ (par exemple : $|AX\rangle$ n'est pas égal à $|A||X\rangle$, X non nul n'implique pas $|X\rangle > 0$, etc.).
- **Q27 à Q35** : questions rarement ou très rarement traitées par les candidats. On obtient de manière récurrente des propositions pertinentes de contre-exemples en **Q31**. En **Q30**, l'inégalité entre dimension du sous-espace propre et multiplicité de la valeur propre est souvent énoncée dans le mauvais sens.

Conclusion

Il est absolument primordial de se présenter à une épreuve de ce niveau avec une connaissance précise des éléments de cours et une capacité à les manier avec précision et rigueur. Il est également important d'apporter une attention particulière à ce qui semble être considéré par de nombreux candidats – à tort – comme des détails : déclaration des variables, utilisation pertinente des liens logiques (implications, équivalences) et des mots de liaison. Il importe également que les candidats sélectionnent et mentionnent explicitement la totalité des arguments nécessaires pour répondre à chaque question et organisent leur raisonnement avec méthode. Cela pourra par exemple leur éviter d'oublier de traiter certains aspects d'une équivalence ou d'une disjonction de cas. Ce manque de rigueur explique que de nombreux candidats risquent de se retrouver déçus par leur note, s'ils ont eu l'impression de traiter de nombreuses questions du sujet, alors que la plupart des réponses sont incomplètes ou insuffisamment précises.

Le jury tient également à rappeler l'impact significatif d'une copie bien présentée, rédigée dans un français correct. Il en aura été tenu compte dans la notation. Les désagréments impliqués par un manquement à ces règles d'usage sont doubles :

- sur le fond, un certain manque de soin ou une rédaction précipitée fait manquer des points importants de la question ou certaines étapes cruciales d'un raisonnement ;
- sur la forme, l'impression laissée au correcteur par une copie négligée est forcément négative. Pour éviter tout désagrément, le jury recommande aux candidats de soigner leur écriture, de limiter les

ratures, d'éviter de multiplier les insertions plus ou moins lisibles ou les renvois vers une autre page, et d'écrire dans un français correct.

Enfin, il n'est pas nécessaire de se précipiter et de traiter un nombre impressionnant de questions pour obtenir un très bon total : il suffit de procéder avec soin, dans un esprit scientifique empreint de rigueur et de précision. Les bonnes et très bonnes copies sont, presque sans exception, de cette sorte. Le jury encourage les futurs candidats à prendre ces bonnes habitudes dans leur préparation.