Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet est constitué de trois parties largement indépendantes. La partie I est une étude de quelques propriétés classiques de la fonction Gamma d'Euler. La seconde utilise la fonction Gamma pour étudier une intégrale à paramètre. Enfin la troisième partie étudie une suite (S_n) de variables discrètes suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(n\lambda)$ et se propose de démontrer le théorème central limite sur cet exemple, puis d'en déduire l'équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n\lambda \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Analyse globale des résultats

Ce sujet balaye une partie importante du programme d'analyse et de probabilités en PC. Il est fortement orienté vers les intégrales à paramètre, puisque les parties I et II y sont entièrement consacrées. Le fait que la première partie traite d'un point très proche du cours a certainement rassuré les candidats et ceux, nombreux, qui ont intégré les méthodes d'étude de ces intégrales, ont pu bien s'exprimer sur ce sujet. La partie II utilisant les mêmes méthodes du moins au début, ceci explique qu'elle aussi ait été plutôt bien réussie dans l'ensemble. Il faut cependant dire que l'écart est énorme entre ceux qui maitrisent correctement les théorèmes généraux de l'intégration et souhaitent les appliquer rigoureusement et ceux qui se contentent de survoler les questions sans même évoquer les problèmes qui peuvent poser souci. Le début de la partie III est très souvent correctement traité, il s'agit essentiellement de questions vues en cours concernant les fonctions génératrices et la loi de Poisson. Par la suite seuls les meilleurs candidats ont pu s'exprimer, mais il y avait une coupure très nette en termes de difficulté à partir de III C.

En résumé il apparait clairement que ce sujet a permis de valoriser les candidats sérieux et ayant bien travaillé leur cours.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

I. Autour de la fonction Gamma d'Euler

I.A – Bien que cette fonction ne soit pas explicitement au programme de PC, elle est naturellement étudiée comme exemple standard d'intégrale à paramètre et cela se ressent dans les copies, on est très proche d'une question de cours. Certains candidats distinguent les cas $x > 1$ et $x < 1$ ce qui alourdit un peu la rédaction mais semble tout à fait logique puisqu'alors la fonction n'est plus définie en $t = 0$.

La relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ figure sur la grande majorité des copies, mais son application au calcul de $\Gamma(x+n)$ est plus délicate : on voit trop souvent la formule $\Gamma(x+n) = x^n\,\Gamma(x)$, ou $\Gamma(n) = n!\,\Gamma(0)$. Une erreur très répandue est d'exprimer $\Gamma(x+n)$ à l'aide d'une « factorielle », $(x+n-1)! = (x+n-1)(x+n-2)\cdots x$, cette notation étant bien entendue dépourvue de sens.

Les changements de variable dans une intégrale convergente doivent être faits avec une fonction bijective strictement monotone, cette condition devait figurer sur la copie.

I.B – Question plutôt bien traitée dans l'ensemble si on ne tient pas compte de l'intégrabilité de la fonction dominante : c'est sans doute dû au fait que la plupart des candidats avaient traité ce point en cours. La majorité des candidats pense à se placer sur le segment $[a,b]$ comme le suggère fortement le texte. Seules de très bonnes copies traitent correctement le fait que la fonction $(t^{a-1}+t^{b-1})\left|\ln(t)^k\right|\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable au voisinage de 0^+. Quelques candidats qui écrivent $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^x) = xt^{x-1}$ sont évidemment fortement pénalisés, mais cette erreur est parfois à mettre sur le compte de l'étourderie.

I.C – Cette question est plus difficile. L'utilisation de Γ'' est souvent comprise, pour justifier l'unicité de la racine de Γ'. Certains candidats ont tenté de démontrer que la fonction Γ' change de signe, ce qui n'est pas si évident. Évidemment le théorème de Rolle s'applique sur $[1,2]$ mais encore faut il y penser ! On est ici de nouveau proche du cours. L'obtention rigoureuse de la limite de Γ en 0 a été valorisée. Très peu de candidats ont déterminé rigoureusement les limites de Γ' en 0 et $+\infty$.

II. Une transformée de Fourier

II.A – Cette question reprend les arguments du I, la majoration ne nécessitant plus le passage par un segment $[a,b]$ pour la domination. Les défauts majeurs rencontrés se situent dans les majorations et la gestion des modules. On voit très souvent des termes complexes dans les fonctions majorantes ce qui n'a évidemment aucun sens. Il n'en reste pas moins que cette question est l'une des mieux réussies.

II.B.1) Cette question plutôt facile a été malheureusement très mal réussie. Certains candidats, orientés par le texte, ont tenté de prouver que le développement de F en série de Taylor convergeait bien vers F, sans d'ailleurs formuler le problème sous cette forme : cette voie nécessitait une majoration du reste intégral que très peu ont vraiment bien justifiée. Il était préférable bien entendu d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme, mais cela nécessitait de justifier correctement la convergence de la série $\left(\sum \dfrac{\Gamma(n+1/4)}{n!}\left|x^n\right|\right)$, ce qui se fait soit par majoration de $\Gamma(n+1/4)$, soit par d'Alembert, et donne ainsi la réponse au rayon de convergence. L'application du théorème d'intégration terme à terme n'est que rarement clairement évoquée, mais surtout la vérification des hypothèses pose des problèmes peu compréhensibles au vu de sa simplicité.

II.C – Question purement calculatoire, qui permettait d'engranger des points plutôt faciles, pourvu que l'on sache un tant soi peu manipuler les nombres complexes.

III. Autour de la loi de Poisson

III.A – Question de cours. On attendait que le candidat refasse tous les calculs, notamment ceux de l'espérance et de la variance, qui pouvaient se déduire de la fonction génératrice. De même en ce qui concerne la question **III.A.3)** la voie la plus simple utilisait les fonctions génératrices, mais il fallait préciser que la fonction génératrice caractérise la loi de probabilité.

III.B – Beaucoup de candidats ont souhaité utiliser ici l'inégalité de Markov, qui ne permettait pas de conclure.

III.C.1, 2) Ces questions, portant sur le programme de PCSI, ont permit aux meilleurs candidats de s'exprimer : caractère Lipschitzien des fonctions à dérivée bornée, inégalité de Taylor-Lagrange, majoration d'une somme d'intégrale, relation de Chasles. Le point le plus délicat consistait à montrer que $\mathrm{Card}(I_n) = o(n)$.

III.C.3 – 6) Le problème présente à partir de cet endroit des difficultés d'un ordre nettement supérieur à ce qui précède. Très peu de candidats ont passé ce cap, mais certaines copies remarquables sont d'un niveau exceptionnel. Le sujet présentait une coquille à la question **III.C.4)** qui été corrigée quasiment systématiquement sur les copies abordant la question avec les bonnes armes.

III.D, E – Peu de commentaires sur ces questions qui n'ont quasiment jamais étés abordées, en dehors de la question **III.E.1)**, ou l'on pouvait utiliser le théorème de convergence dominée, sous réserve de prolonger la fonction sur $[0, +\infty[$.

Conseils aux candidats

Sur le fond

Les théorèmes importants, concernant en particulier les intégrales à paramètres doivent être bien mis en forme : les hypothèses, souvent nombreuses doivent être étiquetées pour rendre la lecture plus facile. Certaines copies sont à ce titre illisibles et peuvent alors être pénalisées.

Il ne faut pas hésiter à initier un calcul ou un raisonnement en indiquant que l'on n'a pas réussi à conclure, le correcteur peut prendre en compte une idée inaboutie.

Il ne faut pas masquer les problèmes : le correcteur attendait par exemple que l'on souligne dans la question **III.C.3a)** que lorsque $k \in I_n$, k est équivalent à n. Le noter sans le démontrer est une preuve de maitrise de la question qui est récompensée.

Sur la forme

Le soin, la qualité de la rédaction, les figures propres sont des éléments de l'évaluation, mais la présentation, l'orthographe et la grammaire sont malheureusement souvent négligées. Rappelons qu'une minoration peut être envisagée par le correcteur sur ces critères.

Conclusion

L'épreuve portait sur des questions très proches du cours et a donc permis de valoriser les candidats ayant assimilé le cours d'analyse et de probabilités. Elle a été classante, présentant une dispersion moins forte que les années précédentes car plus scolaire. Quelques copies remarquables traitent le sujet quasiment en entier.