

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Le sujet s'intéresse aux sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme  $f$  d'un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel  $E$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . La partie I est consacrée à quelques généralités, notamment le cas des sous-espaces engendrés par une famille de vecteurs propres de  $f$ . La partie II étudie plus particulièrement le cas d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie  $n$  qui est diagonalisable et admet  $n$  valeurs propres distinctes, et elle se conclut par un dénombrement des sous-espaces stables par  $f$ . La partie III étudie le cas des endomorphismes nilpotents d'ordre  $n$  d'un espace vectoriel de dimension  $n$ , à l'aide d'un parallèle avec l'endomorphisme dérivation. La partie IV établit l'existence d'un plan stable pour un endomorphisme d'un espace vectoriel réel admettant une valeur propre non réelle. Enfin, la partie V relie les hyperplans stables par l'endomorphisme de matrice  $A$  et les droites stables par l'endomorphisme de matrice  ${}^t A$ .

## Analyse globale des résultats

Ce sujet aborde des notions très proches du cours d'algèbre linéaire de PC. Il est totalement conforme au programme. Il nécessitait cependant de la part des étudiants une bonne compréhension des définitions et une aisance dans la démarche deductive en algèbre linéaire : sur ce point ce fut un relatif échec. En effet, il semble que pour une moitié des candidats il soit impossible de produire une démonstration cohérente basée sur des objets abstraits de l'algèbre linéaire souvent d'ailleurs faute d'avoir compris leur nature. Sur ce point, il semble qu'il y ait un net recul par rapport aux années précédentes. Les concepts fondamentaux portant sur une partie centrale du programme d'algèbre linéaire ne sont pas maîtrisés, et pour certains candidats la notion même de sous-espace stable n'est pas comprise, ce qui rendait le sujet infaisable. Nous avons constaté une dispersion très forte des résultats, d'excellentes copies, un nombre conséquent de bonnes copies puis une cassure très nette, et le no-mans-land de ceux pour qui n'ont pas digéré l'algèbre linéaire, et pour lesquels la note ne signifie pas grand-chose. Il est à noter également, en général, une baisse de qualité de présentation et de rédaction.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

La partie I et la partie II sont les moins bien réussies. Elles abordaient de façon générale la stabilité d'un sous-espace : à ce titre la définition  $f(F) \subset F$  était centrale. Dans bon nombre de copies on trouve une confusion entre les éléments de  $F$  et  $F$  lui-même, le calcul de  $f(F)$  se faisant alors comme si  $F$  était lui-même un vecteur. On rencontre également la notion de vecteur stable, ce qui implique une confusion entre  $u$  et  $\text{Vect}(u)$ . Pour les bons candidats ces questions n'ont pas posé de problème étant donné leur proximité avec le cours.

À noter que la frontière entre le cours et les résultats à connaître n'est pas claire. Certains candidats se sentent obligés de redémontrer par exemple qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est une famille libre, ou qu'une famille échelonnée de polynômes est libre, ou encore retrouver la formule du déterminant de Vandermonde. Peut-être était-ce pour prouver qu'ils pouvaient produire un raisonnement rigoureux mais ce n'était pas utile.

La partie III est la mieux réussie, elle a permis à partir d'un exemple à de nombreux candidats de raccrocher au sujet. La partie IV présentait un exemple de matrice  $3 \times 3$  mais elle a été traitée de façon décevante, sans doute car elle utilisait la réduction dans  $\mathbb{C}$ .

## Partie I

**I.A** – C'est la porte d'entrée dans ce problème. Un raisonnement par équivalence n'était pas conseillé. La notion de stabilité pour un sous-ensemble n'est pas claire dans de nombreuses copies : on peut voir par exemple des affirmations du type «  $f(u) \subset u$  » ou encore des « vecteurs stables par  $f$  » ce qui mène parfois à l'extrême simplification :  $f(u) = u$ .

Pour la partie directe, les candidats qui ont pensé à écrire la formule  $f(\text{Vect}(u)) = \text{Vect}(f(u))$  ont bien résumé d'emblée le problème, et se sont ramenés au seul vecteur  $f(u)$ , évitant ainsi de manipuler deux paramètres : en effet le raisonnement basé sur l'égalité  $f(\alpha u) = \lambda u$  est souvent mal rédigé. La réciproque est mieux comprise.

**I.B.1)** Une petite moitié de candidats pense aux sous espaces triviaux, ou à  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sans se poser la question de leur égalité. On constate que l'existence d'au moins une valeur propre pour  $f$  est acquise pour nombre de candidats, ce qui rendait l'obtention du contre exemple inaccessible. Très peu de copies donnent ce contre exemple, dont la recherche paraît nécessairement de nature algébrique quand on a compris que l'on souhaite une matrice réelle sans valeur propre réelle. Mais l'exemple de la rotation qui se dégage sans aucun calcul n'est quasiment jamais cité et c'est vraiment regrettable, c'est sans doute une conséquence de la disparition de la géométrie affine des nouveaux programmes. Parmi les contre-exemples faux, on relève l'application nulle, les projections, ou des applications clairement non linéaires. Au passage, pour l'exemple de l'application nulle, le fait que tout sous-espace soit stable n'apparaît pas clair pour tout le monde, ce qui peut se comprendre.

**I.B.2)** C'est la suite de I.B.1 et la mise en forme rigoureuse de cette question est exceptionnelle, seules les meilleures copies sentent la nécessité de montrer qu'image et noyau sont distincts pour prouver l'existence d'au moins quatre sous espaces stables. Certains pensent à prouver que si  $n$  est impair il existe une valeur propre réelle sans remarquer que 0 l'est par hypothèse. L'obtention du contre-exemple de façon logique comme matrice ne possédant qu'une seule valeur propre n'apparaît quasiment jamais.

**I.C.1)** Cette question est en général bien traitée. Le fait que la restriction à un sous-espace propre de  $f$  soit une homothétie est connu de moins d'un candidat sur deux.

**I.C.2)** Cette question est traitée dans un quart des copies environ, et quand elle est comprise souvent traitée de façon intuitive. La correction a distingué ceux qui ont senti la nécessité de prouver l'existence d'une infinité de droites dans un espace de dimension supérieure ou égale à 2 de ceux qui l'ont considéré comme évident, mais encore fallait-il dire que ces droites étaient stables par  $f$ .

**I.C.3)** Seuls les bons candidats ont vu le lien avec une question classique d'algèbre linéaire, en ne s'intéressant qu'aux droites stables. La correction a distingué deux parties de la question : ceux qui connaissaient le résultat, et ceux qui l'on correctement prouvé. À noter que la démonstration rigoureuse nécessite d'envisager deux cas selon que  $u$  et  $v$  sont ou non colinéaires.

**I.D.1)** Cette question nécessitait de connaître l'énoncé exact du théorème de la base incomplète dont l'utilisation est suggérée dans l'énoncé : « on peut compléter les vecteurs d'une famille libre de  $E$  (ici une base de  $F$ ) à l'aide de vecteurs d'une famille génératrice de  $E$  (ici une base de vecteurs propres de  $E$ ) afin d'obtenir une base de  $E$  ». Les écueils majeurs rencontrés ont été la mauvaise compréhension de cet énoncé, ou la méconnaissance de ce théorème pourtant au programme de PCSI, au profit de « on peut compléter une famille libre de  $E$  en une base de  $E$  » inutilisable ici sous cette forme, ou encore le fait de prendre au départ pour base de  $F$  une famille de vecteurs propres de  $E$ , ce qui n'est pas possible évidemment dans le cas général. Attention à l'utilisation du mot « supplémentaire » qu'il ne faut pas confondre avec le mot « complémentaire ».

**I.D.2)** Cette question, difficile, n'est que très rarement traitée. Il fallait penser ici à montrer l'existence d'une droite stable puisque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , et faire une récurrence sur la dimension de  $E$ , ce qui figure cependant dans certaines copies. À noter que l'on pouvait éviter la récurrence en considérant la somme  $F$  de tous les sous-espaces propres de  $f$  et introduire la restriction de  $f$  à un supplémentaire stable de  $F$ , pour en déduire que ce supplémentaire est nul.

## Partie II

**II.A.1)** La mise en forme rigoureuse de la question nécessite de revenir à la définition de  $\bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ . La question est assez souvent bien traitée, malheureusement nombreux sont ceux qui ont cru qu'alors l'égalité était acquise dans la suite de la partie.

**II.A.2)** Cette question a posé beaucoup de problèmes aux candidats. Tout d'abord il fallait comprendre que l'on abordait la réciproque de la question, II.A.1 et donc qu'il n'était pas possible d'utiliser l'égalité  $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ . Ensuite il fallait comprendre que, l'hypothèse étant «  $f$  est diagonalisable », il fallait utiliser le fait que  $E$  est somme directe des  $p$  sous-espaces propres de  $f$ . Enfin très nombreux sont les candidats qui pensent nécessaire de redémontrer l'existence et l'unicité de la famille  $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ , donc de redémontrer un théorème du cours, prouvant ainsi que la notion de somme directe et de sous-espaces supplémentaires n'est pas acquise.

**II.A.3)** Mêmes remarques, on attendait de voir apparaître le terme « famille libre » sans plus de justifications que le mot « somme directe », mais la notion de somme directe n'est en général pas bien comprise. De plus, la dimension de  $V_x$  est souvent donnée comme le cardinal de la famille génératrice, ce qui simplifie le problème ! Attention, la liberté d'une famille ne découle pas de la non nullité de chacun des vecteurs, et de plus, une somme nulle peut posséder évidemment des termes non nuls.

**II.A.4)** L'expression de  $f^{j-1}(x)$  comme combinaison linéaire des vecteurs  $x_i$  est souvent bien traitée. De façon surprenante la matrice de la famille  $(f^{j-1}(x))_j$  dans la base  $(x_i)_i$  qui devrait en découler naturellement est très souvent diagonale : les candidats ont mal lu la question et ont confondu avec la matrice de la restriction de l'application  $f^{j-1}$  au sous-espace  $V_x$ . Peut être est-ce dû au fait que dans la pratique les matrices représentent le plus souvent des applications linéaires et non des familles de vecteurs.

**II.A.5)** Cette question découlant directement de la précédente et du fait qu'il s'agit d'une matrice de Vandermonde, moins de un candidat sur 10 a su y répondre en reconnaissant le déterminant. À noter que les candidats qui ont su dire que ce déterminant n'est pas nul lorsque les réels  $(\lambda_i)$  sont deux à deux distincts, mais sans donner la formule du déterminant, se sont vu attribuer tous les points. À noter que par conséquent il n'était pas non plus nécessaire de redémontrer la formule du déterminant vue en cours, même si la démonstration est intéressante ce n'est pas le lieu de la refaire.

**II.A.6)** Peu souvent traitée correctement.

**II.B.1) et 2)** Bien traitées en général, même s'il y a parfois confusion entre la droite stable et le vecteur propre qui la dirige, souvent considéré comme unique, mais ces confusion étaient déjà décelées à la première question.

**II.B.3) et 4)** La bonne réponse figure assez souvent, mais très rarement bien justifiée, ce qui se fait à l'aide de la propriété démontrée au II.A : en effet un sous-espace stable de dimension  $k$  est la somme des sous espaces  $F \cap E_i$  qui sont de dimension 0 ou 1.

### Partie III

**III.A.1)** Les candidats sont clairement plus à l'aise sur les problèmes « concrets », ce qui explique que la matrice est souvent correcte. Cette partie donnait un peu d'air au sujet plutôt général dans les premières parties.

**III.A.2a)** Cette question a posé des problèmes sur le choix du polynôme  $R$  et de l'entier  $n$ . Il s'agissait de prouver qu'il existe dans  $F$  un polynôme de degré maximum, et la reformulation de la question en français aurait sans doute permis d'y répondre du moins partiellement. Ce genre de réponse, même mal justifiée, a été pris en compte. Au passage, l'existence de  $R$  comme polynôme de degré maximal d'une base de  $F$  n'a que très rarement été évoquée.

**III.A.2b)** Souvent traitée, avec plus ou moins de bonheur. L'évocation d'une famille échelonnée de polynômes dispense de démontrer que la famille est libre, mais de très nombreux candidats refont les démonstrations.

**III.A.2c)** Les questions de dimension sont assez bien comprises.

**III.A.3)** Peu de candidats pensent à rajouter le sous-espace  $\{0\}$ , très peu  $\mathbb{K}[X]$ , exceptionnellement certains envisagent le cas d'un sous espace vectoriel qui ne serait pas de dimension finie.

**III.B.1)** L'exercice classique consistant à démontrer que si le vecteur  $f^{n-1}(u)$  est non nul, alors la famille  $(f^{n-i}(u))_{1 \leq i \leq n}$  est libre, n'est pas toujours bien digéré au niveau de son hypothèse. En effet la question reformulée à partir de l'hypothèse «  $f^{n-1}$  non nul » a entraîné des réponses fausses ou incomplètes, bien que les démonstrations soient souvent bonnes. Le fait que  $f^{n-1}$  soit non nul n'entraîne pas que  $f^{n-1}(u)$  le soit systématiquement pour tout vecteur  $u$ , d'une part, et d'autre part le fait que  $f(u)$  soit non nul n'entraîne pas que  $f^{n-1}(u)$  le soit. Bref la méthode est souvent bonne la conclusion fausse.

**III.B.2)** Traitée correctement dans une copie sur deux, cette question prouve de nouveau que la notion de matrice d'un endomorphisme dans une base est plutôt bien assimilée. Les erreurs portent le plus souvent sur l'ordre des vecteurs de la base, entraînant alors une confusion avec la transposée de la matrice attendue.

**III.B.3)** Question abordée par un tiers de candidats, qui n'ont en général vu qu'une première étape dans les calculs pour remonter les échelons. Le facteur  $i!$  n'apparaît que très rarement, remplacé le plus souvent par le facteur  $i$ .

**III.B.4)** Le rapport avec la matrice  $A_n$  n'est que très rarement utilisé correctement. Il l'est cependant dans les excellentes copies.

### Partie VI

**IV.A** – La matrice  $M$  apparaît assez souvent sans justification, d'ailleurs cette question relève directement du cours, il suffisait de traduire la définition du produit matriciel.

**IV.B** – Abordée correctement dans un tiers des copies.

**IV.C.1)** La première partie de cette question est très souvent bien traitée. Quand à la seconde,  $\bar{Z}$  est un vecteur propre de  $M$ , donc la famille  $(Z, \bar{Z})$  est libre puisque  $\lambda \neq \bar{\lambda}$ , et par conséquent la famille  $(X, Y)$  l'est également : cet enchainement logique non trivial n'a pas été bien vu, ce qui n'est pas surprenant. Mais il y a des candidats qui ont compris qu'il fallait en passer par le calcul de  $f(X)$  et  $f(Y)$  pour conclure à la liberté de  $(X, Y)$ .

**IV.C.2)** Question traitée par les très bons candidats.

**IV.D** – La réponse correcte apparaît dans les copies des candidats qui ont compris les deux questions précédentes.

**IV.E** – Apparaissent, mais très rarement, les endomorphismes  $P \rightarrow XP$  ou  $P \rightarrow \int P$ .

**IV.F.1)** Cette question nécessitait de calculer le polynôme caractéristique de  $A$ , puis de déterminer les sous-espaces propres de  $A$ , du moins deux sur les trois, puis d'appliquer ce qui précède. À ce stade du problème ces enchainements n'ont malheureusement pas abouti, soit en raison d'erreurs de calcul dans le calcul du polynôme caractéristique, soit en raison de la présence de calculs dans  $\mathbb{C}$ . La matrice  $T$  n'apparaît que très rarement, et la question n'est jamais traitée dans son intégralité.

**IV F.2)** Jamais traitée correctement.

**IV.F.3)** Très rarement abordée.

**IV.F.4)** Jamais abordée.

## Partie V

**V.A.1) et 2)** Bien que souvent abordées car à priori proche du cours, ces questions n'ont pas été bien comprise. Il suffisait de donner la formule, nécessaire, de ce produit scalaire, mais les candidats n'ont que rarement compris qu'il fallait utiliser pour cela le fait que la base est orthonormée.

**V.B)** Cette question, indépendante du reste du problème, a donné lieu dans les très bonnes copies à d'excellentes solutions, notamment pour la réciproque.

**V.D.1) et 2)** Parfois abordée avec succès dans les meilleures copies.

## Conseils aux futurs candidats

*Sur le fond.* Les questions de ce problème sont pour la plupart très proches du cours, mais nécessitent pour y répondre de savoir aller au-delà du simple énoncé des théorèmes. Ainsi la préparation de cette épreuve passe bien entendu par une bonne connaissance des définitions exactes pour pouvoir les exploiter, mais aussi par un travail d'approfondissement et une relecture de certaines démonstrations fondamentales du cours, ici par exemple tout ce qui concerne la notion de somme directe, ou d'éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice. Les candidats ne prenant pas la peine de bien justifier leur argumentation sont pénalisés, il y a trop souvent des pseudo-raisons intuitifs et non justifiés.

*Sur la forme.* Le soin, la qualité de la rédaction, les figures propres sont des éléments de l'évaluation, mais la présentation, l'orthographe et la grammaire sont malheureusement souvent négligées. Rappelons qu'une minoration peut être envisagée par le correcteur sur ces critères.

## Conclusion

L'épreuve a été très classante avec une forte dispersion des notes, d'excellentes copies, mais un trop grand nombre de candidats très en peine pour produire le discours rigoureux attendu dans ce type de problème.