Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet traite essentiellement des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, en les abordant sous plusieurs aspects. La première partie montre une interprétation géométrique du jacobien de telles fonctions. La seconde partie étudie, lorsque $n = 2$ et lorsque la fonction f est linéaire, les propriétés d'un couple (x, y) solution du système différentiel $(x'(t), y'(t)) = f(x(t), y(t))$, en reliant l'aire du parallélogramme de cotés $x(t)$, $y(t)$ à la divergence de f. Les parties III et IV s'intéressent au cas des applications de classe C^2 dont la jacobienne est en tout point une matrice symétrique, antisymétrique ou orthogonale. Une démonstration du théorème de Poincaré est ainsi proposée dans la partie III.

Analyse globale des résultats

Le sujet porte essentiellement sur le thème, ô combien important notamment en PC, des fonctions de plusieurs variables et rompait ainsi avec une tradition assez longue de sujets d'analyse. Il présente une longueur très raisonnable qui a permis à un nombre important de candidats de pouvoir consacrer du temps à l'ensemble des questions du problème.

Il apparait tout d'abord que les notions de différentielle, jacobienne, dérivées partielles d'ordre 1 et 2, sont en général plutôt bien comprises par une majorité de candidats et c'est une bonne surprise, même si la rigueur n'est pas toujours au rendez-vous. Environ un tiers des candidats a compris le sens général du problème et l'a traité avec plus ou moins de bonheur, prouvant ainsi une bonne assimilation de ce chapitre. Un tiers est moins à l'aise et arrive à traiter certaines questions notamment lorsque l'application f est affine mais est très gêné par les questions de dérivées de fonctions composées. Enfin le dernier tiers n'a traité que les questions liées au système différentiel de la partie II. Ainsi, la résolution des systèmes linéaires de la partie II, qui ne présentait pas de réelles difficultés, est en général bien traitée.

Le théorème d'inversion des dérivées partielles, appelé communément théorème de Schwarz, est utilisé plusieurs fois dans ce problème et il fallait bien entendu en citer les hypothèses, ce qui n'est le cas que dans une copie sur deux. À noter que ce théorème est souvent attribué à divers mathématiciens comme Cauchy, Fubini voire Fermat ce qui est fâcheux, mais non sanctionné.

Seules les très bonnes copies ont abordé avec succès les questions **III.C** et **IV.C**, certains candidats montrant une excellente maîitrise du calcul différentiel.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Partie I

I.A Certaines copies montrent d'emblée une faiblesse sur le cadre des fonctions de plusieurs variables en parlant de dérivée $f'(x)$ alors que f a plusieurs variables. La question est cependant souvent bien traitée.

I.B La règle de la chaine est en général utilisée mais certaines notations maladroites comme $\frac{\partial g}{\partial ta_i}$ trahissent une confusion sur le sens exact des dérivations mises en cause dans cette formule. Les hypothèses de la formule de Taylor sont souvent oubliées.

I.C La remarque du texte sur la continuité de l'application Φ n'a quasiment jamais été utilisée. En fait l'argument de multilinéarité et l'argument de continuité sont le plus souvent fusionnés, le terme $o(t^n)$ sortant systématiquement du déterminant sans aucune justification.

Partie II

II.A Bien traitée.

II.B) Une coquille évidente donnait la fonction u_a à valeurs dans $\mathbb{R}$, elle a été rectifiée sur presque toutes les copies, souvent inconsciemment. Un point de bonus a été attribué aux très rares copies qui ont buté sur cette erreur. En règle générale cette question a été très bien traitée.

II.C.1 Cette question n'a pas toujours été bien comprise, certains candidats s'obstinant à conserver le paramètre t dans l'expression de la fonction θ_a.

II.C.2 Les graphiques demandés ici ont permis aux candidats patients ayant répondu correctement à **II.C.1** de valoriser fortement cette bonne réponse.

II.D.1 Un candidat sur deux a réussi à résoudre correctement cette question, le plus souvent avec la variation de la constante.

II.D.2 Cette question a donné lieu à de nombreuses méthodes : l'une, subtile, consiste à montrer que la fonction $\det(u_a(t), u_b(t))$ est solution d'une équation différentielle simple, la plus courante est le passage par une trigonalisation / diagonalisation, mais les candidats ont souvent eu du mal à se débarrasser des matrices de passage.

Partie III

III.A Les hypothèses du théorème de Schwarz doivent être citées.

III.B.1 Souvent bien traitée.

III.B.2 Cette question a souvent donné lieu à de petits arrangements sur les permutations utilisées pour obtenir le résultat.

III.B.3 Cette question est souvent abordée sous le bon angle, cependant le fait qu'un gradient nul entraine que la fonction soit constante, résultat qui n'est pas au programme, a le plus souvent été admis, ce qui prouve une bonne compréhension du calcul différentiel. Les tentatives de démonstration ont été valorisées.

III.C La réciproque de l'implication demandée qui reposait sur l'application directe du théorème de Schwarz n'a bizarrement pas été bien réussie. Quant à l'implication directe, elle n'a été traitée correctement que sur les meilleures copies et c'est un exploit car cette question était réellement difficile. Le calcul formel de la dérivée $D_i g(x)$, le plus souvent faux, montre de réelles difficultés à expliciter la dérivée de fonctions composées. Les meilleures copies ont tenté de justifier que g est de classe C^2 à l'aide du théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

Partie VI

IV.A.1 On trouve assez souvent (25%) la bonne définition d'une jacobienne orthogonale. L'exploitation de cette formule par dérivation est plus rare (10%).

IV.A.2 On retrouve les petits arrangements de la question **III.B.2**, il est vrai que les arguments sont en tous points identiques.

IV.A.3 Le produit matriciel, ou scalaire, est montré correctement sur 10% des copies, mais une propriété du type « $AB = 0$ entraîne $B = 0$ » est souvent utilisée sans hypothèses complémentaires.

IV.C Bien qu'abordée sur un nombre non négligeable de copies, cette question délicate n'a que très rarement été réussie, et par des candidats qui ont montré ainsi un excellent niveau.

Les candidats doivent être prêts à composer sur l'ensemble du programme de PC.

Sur une telle épreuve dont le nombre de questions est fort raisonnable, il faut savoir s'attarder sur certaines questions et y consacrer du temps, car en grappillant les points des questions faciles, on verra forcément sa note plafonner. C'est d'autant plus le cas sur ce sujet qui comportait plusieurs questions utilisant des raisonnements analogues.

Le soin, la qualité de la rédaction, les figures propres sont des éléments de l'évaluation.

Les candidats ne prenant pas la peine de bien justifier leur argumentation sont pénalisés.

Conclusions

Ce sujet, en raison de son originalité, aurait pu déstabiliser les candidats, cela n'a le plus souvent pas été le cas et de nombreuses copies sont de bonne facture. L'épreuve a été globalement classante avec une dispersion assez forte des notes, une répartition équilibrée des copies entre un niveau très faible et un excellent niveau.