Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet propose en parties III et IV plusieurs méthodes de calcul d'une intégrale à paramètre, issue du noyau de Poisson

$$P(x,\theta) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+xe^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\right)$$

soit par les séries de Fourier, soit par les sommes de Riemann, soit enfin par les séries entières et le théorème de convergence radiale. La partie I commence par une démonstration de la règle de convergence d'Abel pour les séries, puis la partie II étudie la série entière

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} x^n$$

au voisinage de $x = 1$. Ce sujet balaye largement les questions d'analyse au programme de la filière PC : séries numériques, séries de Fourier, séries de fonctions, séries entières, intégrales généralisées, intégrales à paramètre. Il utilise également des notions de première année comme la factorisation d'un polynôme connaissant ses racines complexes ou les sommes de Riemann. Les parties sont largement indépendantes. Il est de longueur raisonnable, ce qui a permis aux candidats de bien s'exprimer.

Analyse globale des résultats

La première impression qui ressort à la correction des copies est que les candidats qui manipulent pourtant constamment les éléments de $\mathbb{C}$ dans leur formation ne sont pas, en majorité, conscients des pièges qu'ils recèlent. Peut-on comparer deux nombres complexes ou majorer un module par un nombre complexe, chacun sait bien que non, mais dans le feu de l'action c'est ce qui restera sur la copie et ce sera au correcteur de juger ce qui persiste du raisonnement bancal sous-jacent. Les erreurs dans les expressions contenant $e^{i\theta}$ avec θ réel sont légion : on oublie que $|e^{i\theta}| = 1$, on parle de $\ln(1+e^{i\theta})$, on majore $\left|\dfrac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right|$ par $\dfrac{1}{1-e^{i\theta}}$ ou par $\dfrac{1}{|1-e^{i\theta}|}$.

Ceci relève d'un constat plus global concernant la difficulté qu'a une majorité de candidats à mener un calcul correctement et rapidement, et ces questions qui ne devraient pas poser de difficultés deviennent couteuses en temps, c'est sans doute un des effets incontournable de l'utilisation plus répandue du calcul formel.

Ce sujet permettait aux candidats de valoriser la bonne connaissance de leur cours et, de ce coté, le bilan est positif. Les grands théorèmes sont le plus souvent connus et correctement formulés : théorème de convergence dominée, la dérivation d'une intégrale à paramètre, la formule de Parseval etc. Il est toutefois préférable pour alléger la copie d'en donner l'énoncé directement traduit dans le contexte de la question. Les problèmes d'analyse abordés dans ce sujet pouvaient entraîner cependant vers des fautes de raisonnement et elles furent nombreuses. Les plus courantes concernent les séries de fonctions : il s'agit de la confusion habituelle entre conditions nécessaires et conditions suffisantes pour autoriser une dérivation terme à terme (**I.C.3**), de l'affirmation si répandue qu'une série entière converge normalement sur son intervalle ouvert de convergence (**II.A.2.a**). La question **I.A.2** a été particulièrement mal traitée : plus de 9 candidats sur 10 montrent que la série converge en majorant sa somme partielle. En cela ce sujet était ambitieux car la maîtrise des séries à termes positifs ne suffisait pas ici pour raisonner correctement. Les raisonnements d'intégrabilité demandés partie III, bien que classiques, étaient délicats en raison de la présence d'un logarithme. Ces questions ont mis en évidence une méconnaissance de la définition de l'intégrabilité sur beaucoup de copies.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Partie I

I.A.2 La majoration de $\left|\sum a_n b_n\right|$ ne permet pas de conclure.

I.A.3 Inutile de passer ici par l'arc moitié pour majorer $\left|\dfrac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right|$ par $\dfrac{2}{|1-e^{i\theta}|}$.

I.B.2 Question souvent correctement traitée, cependant les coefficients de Fourier potentiels sont parfois mal identifiés.

I.C.1 On pouvait éviter la convergence simple en montrant directement la convergence normale de la série trigonométrique, dont on ne pouvait se passer ici.

I.C.2 Sur certaines copies, la valeur des coefficients de Fourier est donnée directement grâce à la convergence normale de la série trigonométrique. Si les résultats hors programme permettent de conforter le candidat dans sa démarche vers le résultat attendu, ils ne peuvent être acceptés tels quels et doivent être prouvés à partir des éléments du programme. De plus un mauvais choix d'indice dans cette preuve a souvent mené à la valeur $a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

I.C.3 Question difficile et très rarement comprise. L'erreur de logique suivante est trouvée sur les copies : puisque la série des dérivées ne converge pas normalement la fonction ne peut être de classe $\mathcal{C}^1$.

Partie II

II.A.1 Un rayon de convergence ne peut être égal à $e^{i\theta}$.

II.A.2 a) Le fait que g soit dérivable est un résultat du cours sur les séries entières.

II.A.2 b) Question en général bien traitée. Attention cependant, il faut surtout éviter de laisser croire au correcteur que le résultat est acquis lorsque ce n'est pas le cas, ce qui laisse planer le doute sur les affirmations suivantes.

II.B.1 La somme est finie et ne nécessite pas de justification particulière pour l'inversion avec l'intégrale. Cependant le fait que $\theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ n'est que très rarement utilisé dans le raisonnement.

II.B.2 Les majorations pour l'application du théorème de convergence dominée doivent bien entendu se faire en module : voir remarque plus générale sur l'utilisation des nombres complexes. Il ne faut pas oublier de mentionner que la fonction dominante doit être intégrable, ici sur $[0,1]$.

II.C.1 Cette question a été mal comprise par les candidats. Sans entrer dans trop de détails, le correcteur se serait contenté d'une figure et d'un commentaire évoquant la condition nécessaire

$r(\pi) = -r(-\pi)$ pour l'existence, et la valeur obligatoire $r(0) = 0$. Elle n'est traitée complètement correctement que sur très peu de copies.

II.C.3 Il est évidemment plus profitable de constater son erreur que de tenter de la masquer lorsque le résultat est donné. Par exemple, il était préférable ici d'admettre la valeur (connue) de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ pour en déduire celle de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Partie III

III.A.2 Cette question a donné lieu à de nombreuses erreurs de raisonnement : « lorsqu'une fonction diverge en 0 son intégrale au voisinage de 0 diverge également », « $\sin x \in [0,1]$ et $\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x$ converge, donc $\int_0^1 \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$ converge ». Les candidats doivent citer le domaine de continuité avant de situer les problèmes. La justification de l'intégrabilité de $x \to \ln(\sin x)$ en 0 doit être menée en valeur absolue et l'éventuelle composition d'un équivalent avec le logarithme doit être justifiée au moins une fois dans la copie. Le comportement des candidats est en règle générale décevant sur cette question et toutes celles (**II.B.4**, **III.B.4**) qui abordent le sujet de l'intégrabilité.

III.B.1 On retrouve dans cette question l'identification des coefficients d'une série trigonométrique avec les coefficients de Fourier de la somme de cette série. Le jury rappelle qu'il n'existe aucun théorème au programme sur ce sujet. Mais si la démonstration a été faite proprement au **I.C.2** par le candidat, il va de soi qu'il peut justifier ici plus rapidement en se référant à cette question.

Partie VI

IV.A.1 On ne peut appliquer le théorème de D'Alembert. Le passage par la convergence absolue est incontournable.

IV.A.3 Question rarement abordée, traitée correctement sur 1% des copies.

Une dernière remarque, évidente : La présentation de la copie est importante : il est souhaitable de numéroter les feuillets, de bien identifier les questions abordées, de proposer une écriture lisible en évitant au maximum les fautes d'orthographe.

Conclusions

Le sujet a permis de mettre en valeur les candidats qui maîtrisent à la fois le calcul, notamment dans $\mathbb{C}$ et les notions fondamentales de l'analyse, notamment les séries de fonctions. Il a en ce sens été très discriminant.