croit savoir sur le thème et les oeuvres, sans se préoccuper des termes de la formule à prendre en compte : dans un nombre incroyable de devoirs, on ne rencontre même pas les mots « pauvreté » ou « possession ». On préfère réciter une leçon apprise ou empiler des citations, pas toujours exactes ni pertinentes.

Le corpus à étudier reste évidemment essentiel. La question posée n'est jamais générale : elle exige, comme l'indique clairement la consigne, de s'appuyer sur « <u>les trois oeuvres inscrites au programme</u> », en les analysant et en les confrontant. Encore ne suffit-il pas de montrer qu'on les a parcourues hâtivement, au point d'en avoir juste retenu quelques poncifs. Il s'agit bien plutôt de prouver qu'on les a lues de façon assez approfondie et personnelle pour être capable de les étudier dans des perspectives précises, plus fines ou moins attendues. Or, la plupart du temps, on ramène tout le débat à un lieu commun, à une question banale traitée en classe ou à un sujet proposé dans un autre concours : l'argent fait-il le bonheur ? Est-il immoral ? Une société sans argent est-elle possible ?

On se borne alors à gloser maladroitement les textes pour en tirer les arguments les plus étranges. Cléante est cité comme modèle du pauvre. Le capitaine Chave passe aux yeux de certains pour un parangon de sagesse et de vertu. Selon d'autres, Simmel prônerait le mépris de l'argent, à l'imitation des moines bouddhistes ou franciscains. Très souvent, on montre peu de familiarité avec Molière, Zola ou Simmel. Mais on s'autorise d'amples digressions pour parler d'autres auteurs ou d'autres textes que l'on connaît encore moins et dont la convocation, le plus souvent, semble totalement incongrue dans le cadre du sujet à traiter. Dans quelques cas, hélas récurrents, ces vagabondages s'égarent dans la vulgarité la plus condamnable. Les correcteurs ne sont pas encore prêts à inscrire le chanteur Balavoine au panthéon des grands penseurs. Qu'on ne s'y trompe pas : il ne s'agit pas de faire preuve d'érudition, moins encore de vernis mondain. À nos yeux, le programme, tel que le définissent chaque année le thème et le corpus, suffit à nourrir une réflexion convaincante et à fixer pour tous les candidats l'horizon culturel qu'ils doivent être capables d'embrasser pour réussir l'épreuve.

Au-delà de la faiblesse des contenus, ce sont les défauts de méthode et le peu de rigueur dans la pensée qui inquiètent particulièrement. Quelques candidats, très peu au fait des exigences du concours, n'ont pas même l'idée de construire un plan. Beaucoup de ceux qui s'en préoccupent montrent dans ce domaine une certaine impréparation. Sans même songer à raisonner à partir des termes du sujet ni des oeuvres à confronter, ils posent souvent *a priori* une rhétorique factice, caricature de démarche dialectique (« Si l'argent est mauvais, il a quand même de bons côtés. Il faut donc en user prudemment. »). Certains se bornent à juxtaposer des rubriques décousues, sans projet argumentatif clair. D'autres, malgré des approches plus pertinentes, ne parviennent pas à sortir des dilemmes dans lesquels ils ont commencé par s'enfermer, sinon au prix d'incohérences. Par exemple, ils observent très justement que si le riche n'a que des possessions illusoires, le pauvre manque souvent de tout et n'est pas même maître de sa vie. Malheureusement, ils ne savent quoi en déduire, sinon que l'idéal consisterait à établir un équilibre entre richesse et indigence…

Sans compter ceux qui n'analysent aucun concept et raisonnent jusqu'à l'absurde sur la pauvreté, sans distinguer celle qu'on choisit par ascétisme vertueux de celle qu'on subit dans le malheur. Quant à la possession, ils n'imaginent même pas qu'on puisse posséder autre chose que des objets ou de l'argent. La simple lecture du texte à résumer aurait dû suffire à mettre sur la bonne route. C'est bien pour cela que l'épreuve est conçue comme un tout indissociable, le résumé préparant la dissertation qui le prolonge.

Nous avons pu d'autant mieux distinguer quelques excellents candidats, capables, par exemple, de voir comment les trois œuvres permettaient :

- de mesurer les limites de la possession fondée sur la richesse matérielle ;
- de constater que « les vraies richesses » ne sont pas inaccessibles à l'esprit supérieur qui sait ne pas devenir esclave des fausses, voire qui décide d'y renoncer ;
- mais aussi de comprendre que la pauvreté ordinaire prive de la possession de soi-même, de son destin et de sa liberté, biens essentiels que l'argent peut contribuer à préserver faute de pouvoir les acquérir.

Certains seront surpris, après avoir couvert des pages sans prendre le temps de réfléchir, d'obtenir une note très faible. Cela découle pourtant de la simple logique : l'épreuve de rédaction valorise ceux qui possèdent vraiment leur savoir et leur pensée, qui n'essaient pas d'éblouir par de fausses richesses, empruntées puis étalées sans discernement.

Mathématiques

Mathématiques I

Présentation du sujet

Le but du problème est d'établir une extension du *théorème de Weierstrass* : une fonction f est de classe C^∞ sur le segment $[-1,1]$ si et seulement s'il existe une suite (p_n) pour $n\in\mathbb{N}$ de fonctions polynomiales fournissant une approximation uniforme de f, à décroissance rapide, c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ n^k \sup_{[-1,1]} |f - p_n| \to 0$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

La partie I propose une présentation fonctionnelle assez atypique des polynômes de Tchebychev : toute la partie permet de retrouver les résultats classiques sur ces polynômes à partir de cette présentation.

La seconde partie est consacrée aux inégalités de Markov et de Bernstein : ces inégalités s'obtiennent ici avec des outils conformes au programme de PC. Les compétences calculatoires ainsi que la culture générale mathématique du candidat sont très largement sollicitées dans ces deux premières parties.

La troisième partie fournit la preuve du résultat cité ci-dessus : les polynômes de Tchebychev permettent de faire un lien entre approximation polynomiale et théorie des séries de Fourier, théorie où la notion de décroissance rapide apparaît naturellement ; les coefficients de Fourier d'une fonction périodique et C^∞ sont effectivement en décroissance rapide. Le programme de seconde année (Fourier, séries numériques) est cette fois très présent.

Analyse globale des résultats

Le problème est un peu long : aucun candidat ne l'a traité dans son intégralité.

Les parties I et II font appel à la culture mathématique des candidats : trigonométrie, raisonnement par récurrence, étude de fonctions. Seule la question relative aux intégrales impropres concerne du cours. La partie III traite des séries numériques, des séries de fonctions et des séries de Fourier : les candidats qui abordent cette partie, peu nombreux, se contentent en général de citer les théorèmes généraux sans vérifier que les hypothèses sont satisfaites.

Certains points très importants semblent souvent méconnus : nécessité de prendre des valeurs absolues dans les questions de majoration, différence entre convergence simple, convergence absolue et convergence normale.

À noter que la question relative à la programmation est trop souvent ignorée.

La présentation est en général convenable.

Commentaires sur les réponses apportées et conseil aux candidats

I.A.1.c) Un bon tiers des copies affirme que $\cos(n\pi/2) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.A.3) Certaines copies se contentent d'extrapoler les résultats demandés à partir des premiers termes. D'autres invoquent des récurrences rapides ou des itérations, là où des récurrences correctement rédigées leur apporteraient la totalité des points pour, parfois, seulement quelques lignes de plus. Savoir rédiger une récurrence, et prendre le temps de le faire, est un exercice de style auquel les candidats doivent savoir se plier plutôt que de survoler les questions. La récurrence forte (ou double) pose un certain nombre de problèmes (quand l'étudiant y pense) : initialisation sur un seul rang, par exemple.

L'unicité n'est qu'exceptionnellement établie, la plupart des candidats s'y intéressant se contentant de prouver que la suite déjà construite... est bien unique, tout comme en I.C.3.b).

I.A.4) La démonstration est très rarement correcte, beaucoup se contentant de regarder ce qui se passe en ± 1. D'autres justifient l'absence de démonstration par le fait que l'énoncé dit préciser et non démontrer.

I.A.5) Comme à chaque fois qu'elle est demandée dans un sujet, une bonne maîtrise de MAPLE est extrêmement lucrative pour les candidats. Tous ceux qui dédaignent cet outil perdent des points bêtement.

I.B.2.a) Les équivalents sont très mal utilisés et les justifications en général absentes.

I.B.3) De nombreux candidats, après des calculs de dérivées faux, font preuve de mauvaise foi et affirment arriver à l'équation différentielle.

L'extension à $\mathbb{R}$ n'est que très exceptionnellement abordée (mais correctement lorsqu'elle l'est).

I.C.1) Une proportion importante de copies sous-entend (ou utilise directement) qu'un produit de fonctions intégrables est intégrable. La continuité de l'intégrant, prévue au barème, n'est même pas mentionnée dans la majorité des cas : et quand elle l'est, elle devient souvent suffisante à la convergence de l'intégrale ! Les modules (liés à l'intégrabilité) apparaissent et disparaissent selon les besoins.

I.C.2) Cette question est abordée avec succès par une majorité des copies, mais elle donne souvent lieu à des longueurs.

I.C.3.a,b) Ces questions sont abordées avec succès par les meilleures copies. Le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt est rarement utilisé, les candidats préférant refaire la démonstration.

I.C.4) Très peu de copies savent correctement calculer ces intégrales.

II.A.1.a) Un raisonnement par récurrence était possible mais ceux qui ont choisi cette méthode ont très rarement réussi à conclure correctement.

II.A.1.b) L'utilisation d'un argument de concavité a permis à beaucoup une démonstration rapide.

II.A.2) Les valeurs absolues sont très mal gérées par les élèves (en fait, elles sont bien souvent oubliées). La notion de borne supérieure est mal maîtrisée, les inégalités deviennent souvent des égalités, sans aucune preuve.

II.A.3) Le nombre de racines distinctes est précisé dans très peu de copies et le classement par ordre croissant est rarement fait.

II.B.2) L'étude sur $[x_{n,1}, x_{n,n}]$ est souvent abordée, parfois avec succès ; le cas général, par contre n'a été résolu que dans quelques copies.

II.B.3) Très peu pensent à utiliser la formule de Moivre et préfèrent tenter un raisonnement par récurrence : l'idée est bonne mais elle est rarement menée à bien.

Le reste de la partie II n'est à peu près jamais abordé.

III.A.1) C'est la question la plus abordée de la partie III ; les erreurs les plus fréquentes sont l'oubli des valeurs absolues, l'affirmation α_n est borné donc la série $\sum \alpha_n$ converge ou l'utilisation de la règle de D'Alembert.

III.A.2) La question n'a pratiquement jamais été traitée correctement.

III.B.2) Les hypothèses du théorème concerné sont en général connues, mais leur mise en application pose problème : principalement parce que la question II.C), nécessaire aux convergences normales, n'a pas été résolue.

Les questions qui suivent n'ont pas été abordées ou sans succès (à part quelques copies).

Conclusion

Les candidats doivent penser à parcourir l'intégralité du sujet avant de se lancer dans la rédaction de la solution. Cela leur permet de voir quels sont les thèmes abordés et d'abandonner éventuellement une partie pour en attaquer une autre où ils se sentiront plus à l'aise.

Ils ne doivent pas sauter systématiquement les questions concernant l'utilisation d'un logiciel de calcul formel car ces questions sont souvent très payantes.

Mathématiques II

Présentation du sujet

Les algèbres de Lie sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ stables par le crochet $(M,N)\mapsto[M,N]=MN-NM$. Dans une algèbre de Lie $\mathcal{L}$, une sous-algèbre $\mathcal{H}$ constituée de matrices diagonalisables et maximale pour l'inclusion est appelée une sous-algèbre de Cartan. Il est classique de rechercher alors les éléments λ de $\mathcal{H}^*$ tels que $\mathcal{L}_\lambda := \{M \mid [H,M]=\lambda(H)\cdot M\} \neq 0$. La forme de cette équation fait appeler ces formes linéaires les "racines" de l'algèbre de Lie. Ces ensembles finis de formes linéaires ont des propriétés remarquables d'angles et de longueur qui conduit à leur classification et finalement à celle des algèbres de Lie. Il s'agit de la classification "ADE", connue et utilisée par la plupart des mathématiciens et physiciens théoriciens.

La première partie du problème introduisait à la notion de système de racines. La seconde introduisait à la classification des sous-algèbres de Lie de $\mathcal{M}(2,\mathbb{C})$. La troisième partie esquissait une étude systématique des sous-algèbres de Cartan en dimension quelconque, puis à celle de l'algèbre de type B_2 (appelé ici $\mathcal{R}_4$).

Analyse globale des résultats

Ce sujet était de nature conceptuelle, rompant avec d'autres sujets plus calculatoires lors des sessions précédentes. De nombreuses questions demandaient une démonstration par condition nécessaire et suffisante, ou un contre-exemple. Les passages les plus délicats étant l'équivalence de trois assertions à la question II.C, et une démonstration par récurrence sur la dimension d'un espace vectoriel en III.A.3. On peut regretter que les candidats connaissent mal l'usage des quantificateurs -même exprimés en langage courant.

Pour ce qui concerne les connaissances, la plupart des questions concernent l'algèbre linéaire et la réduction des endomorphismes. Cela explique sans doute que les correcteurs de cette épreuve n'ont pas relevé de lacune particulièrement grave et générale.

Les différences entre candidats ont davantage tenu à la capacité à formuler des raisonnements complets.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

I.A. - Peu de copies donnent la formule d'une projection orthogonale sur une droite en prenant soin de la norme du générateur.

I.B. - Question facile mais qui donne lieu à beaucoup de redondances, comme chaque fois que le raisonnement doit se substituer au calcul.

I.C.1a - Cette question a constitué une plutôt bonne surprise dans la mesure où beaucoup de candidats ont su voir que le résultat devant être entier, il suffisait de montrer qu'il ne peut être ≥ 4.

I.C.1b - Question assez bien réussie par les candidats qui l'ont abordée.

I.C.2 - Cette question aussi a été bien réussie par les candidats qui l'ont abordée.

I.D.1 - Ici la seule difficulté consistait à s'assurer que ce minimum est $\leq \pi/2$, essentiellement en changeant α en $-\alpha$. Mais peu de copies donnent l'argument.

I.D.2 - Cette question a posé des problèmes de plusieurs ordres aux candidats. Un bon point est que nombre d'entre eux (un tiers de ceux qui abordent la question) ont deviné que les droites correspondant aux éléments de $\mathcal{R}_k$ sont au nombre de k et se déduisent les