MATHÉMATIQUES I

Objectifs

On se propose, dans ce qui suit, de déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants lorsqu'elle est homogène, puis lorsque celle-ci admet un « second membre » d'un type particulier.

La partie I vise à établir des résultats utiles dans les suivantes.

Notations

- Pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$:
  - $*$ si $m \leq n$ l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, m \leq k \leq n\}$ est noté $[[m, n]]$;
  - $*$ $\delta_{m,n}$ vaut 1 si $m = n$, 0 sinon.
- Si $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on note $\mathbb{C}_q[X]$ l'ensemble constitué des éléments de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à q et $\mathbb{C}_{q,p}[X]$ celui constitué des éléments de $\mathbb{C}_q[X]$ divisibles par X^p.
- Si u est une application linéaire, $Ker(u)$ et $Im(u)$ désignent respectivement son noyau et son image.
- Si u est un endomorphisme, par convention, u^0 est l'application identité, et pour tout entier naturel p, on pose $u^{p+1} = u \circ u^p$.
- On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux éléments. On dira que l'intervalle I est un voisinage de 0 s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, \alpha] \subset I$. On note E le $\mathbb{C}$- espace vectoriel des applications de classe C^∞ de I dans $\mathbb{C}$, 0_E son élément nul, id_E l'application identité de E et D l'endomorphisme « dérivation » de E, c'est-à-dire tel que : $\forall f \in E, D(f) = f'$.
- Pour tout y de E, et pour tout k entier strictement positif, $y^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de y. Par convention $y^{(0)} = y$.
- Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$, on note $deg(P)$ le degré de P et $P_{\langle z \rangle}$ l'application de I dans $\mathbb{C}$ définie par : $\forall t \in I, \quad P_{\langle z \rangle}(t) = P(t)e^{zt}$.

Filière PC

Partie I -

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$.

I.A - Montrer que $\mathbb{C}_{q,\,p}[X]$ est un $\mathbb{C}$- espace vectoriel de dimension finie et préciser sa dimension.

I.B - Montrer qu'on peut définir une application φ_z de $\mathbb{C}[X]$ dans E définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \varphi_z(P) = P_{\langle z \rangle}.$$

Montrer que φ_z est linéaire et injective.

I.C - Déduire des questions précédentes que les images par φ_z de $\mathbb{C}_q[X]$ et $\mathbb{C}_{q,\,p}[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies que l'on précisera.

Dans la suite de ce problème, n est un entier naturel non nul, $\alpha = (\alpha_0, \ldots \alpha_n)$ un élément de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que α_n n'est pas nul, et on note (H) l'équation différentielle, d'inconnue y élément de E :

$$(H) \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y^{(k)} = 0_E .$$

Partie II -

On se propose, dans cette partie, de déterminer S_H, l'ensemble des solutions de (H) définies sur I. On admettra que $\dim(S_H) = n$.

II.A - Justifier que $S_H = Ker\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k D^k\right)$.

On note p le nombre de racines distinctes du polynôme $A = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ de $\mathbb{C}[X]$; on note $r_1, r_2 \ldots r_p$ ses racines et $m_1, m_2 \ldots m_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

II.B - Vérifier que S_H contient le sous-espace vectoriel de E :

$$\sum_{j=1}^{p} Ker((D - r_j \cdot id_E)^{m_j}) .$$

On admettra que cette somme est directe.

II.C - Dans cette question, $r \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit P un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$. Justifier l'existence d'un élément Q de $\mathbb{C}[X]$ tel que $d°Q < d°P$ et $(D - r \cdot id_E)(P_{\langle r \rangle}) = Q_{\langle r \rangle}$.

b) En déduire par récurrence la propriété suivante pour tout entier k de $[[1, m]]$:

$$\text{si } P \in \mathbb{C}_{k-1}[X], \text{ alors } P_{\langle r \rangle} \in Ker((D - r \cdot id_E)^k) .$$

c) En conclure que $Ker((D - r \cdot id_E)^m)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension au moins m.

II.D - Déduire de ce qui précède que, pour tout élément y de E, on a l'équivalence suivante, $y \in S_H$ si et seulement si il existe une famille $(P_j)_{j \in [[1, p]]}$ d'éléments de $\mathbb{C}[X]$ telle que :

$$\forall j \in [[1, p]], \quad deg(P_j) < m_j \text{ et } \forall t \in I, \quad y(t) = \sum_{j=1}^{p} P_j(t) e^{r_j t} .$$

II.E - Dans le cas où I est un voisinage de 0, prouver que pour tout réel α strictement positif tel que $]-\alpha, \alpha[\subset I$, les solutions de (H) sont développables en série entière sur $]-\alpha, \alpha[$.

Partie III -

Dans cette partie, on considère un polynôme B de $\mathbb{C}[X]$, non nul. On note d le degré du polynôme B. On choisit un nombre complexe z et on note m l'ordre de multiplicité (éventuellement nul) de z en tant que racine du polynôme $A = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ de $\mathbb{C}[X]$.

On se propose de résoudre l'équation différentielle, d'inconnue y élément de E, notée (L) :

$$(L) \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y^{(k)} = B_{\langle z \rangle} .$$

III.A - Vérifier qu'on peut définir une application ψ, de $\mathbb{C}_{m+d,m}[X]$ dans E, définie par

$$\forall P \in \mathbb{C}_{m+d,m}[X], \quad \psi(P) = \left[\sum_{k=0}^{n} \alpha_k D^k\right](P_{\langle z \rangle})$$

puis montrer que celle-ci est linéaire.

III.B - Prouver que ψ est injective et que $Im(\psi) \subset \varphi_z(\mathbb{C}_d[X])$.

III.C - Démontrer qu'il existe un unique élément Π de $\mathbb{C}_{m+d,m}[X]$ tel que $\Pi_{\langle z \rangle}$ soit solution de (L), définie sur I, puis préciser, en fonction de Π, l'ensemble des solutions de (L) sur I.

III.D - Dans le cas où l'intervalle I est un voisinage de 0, les solutions de (L) sont-elles développables en série entière sur tout intervalle $]-\alpha, \alpha[$ $(\alpha > 0)$ tel que $]-\alpha, \alpha[\subset I$?

Partie IV -

On suppose, dans cette dernière partie, que α_0 vaut 1 et que :

$$M = \max_{k \in [[0,n]]} |\alpha_k| \qquad .$$

On considère également un élément b de E et on note (L_b) l'équation différentielle, d'inconnue y élément de E :

$$(L_b) \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y^{(k)} = b \,.$$

IV.A - Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $]-\alpha, \alpha[\subset I$ et que (L_b) admette une solution développable en série entière sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$.

Montrer que b est également développable en série entière sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$. Qu'en est-il alors des autres solutions de (L_b) ?

IV.B - Montrer que, si $p \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique élément Π_p de $\mathbb{C}_p[X]$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Pi_p^{(k)} = \frac{X^p}{p!} \,.$$

Prouver qu'il existe un unique élément $(\pi_{p,j})_{j \in [[0,p]]}$ de $\mathbb{C}^{p+1}$ tel que :

$$\Pi_p = \sum_{j=0}^{p} \left(\pi_{p,j} \cdot \frac{X^j}{j!}\right) .$$

IV.C - Prouver que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad q \leq p \Rightarrow \sum_{k=0}^{\min\{n,\, p-q\}} (\alpha_k \cdot \pi_{p,\, q+k}) = \delta_{p,\, q}$$

IV.D - Lorsque p est un entier strictement positif, traduire sous forme matricielle le système linéaire précédent d'inconnue $(\pi_{p,\, j})_{j \in [[0,\, p]]}$, élément de $\mathbb{C}^{p+1}$, puis écrire une procédure qui, en fonction de n et du système α, détermine l'unique solution de celui-ci.

IV.E -

a) Vérifier que : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall j \in [[0,\, p]],\ \left|\pi_{p,\, p-j}\right| \leq (2M)^j$.

b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout entier q, alors :

$$\left|\Pi_q(t)\right| \leq (2M + |t|)^q .$$

On suppose dorénavant que b est une application de I dans $\mathbb{C}$ développable en série entière sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ ($\alpha > 0$) inclus dans I. On note r le rayon de convergence de la série entière $\sum b^{(n)}(0)\, z^n$ et on suppose que $r > 2M$.

IV.F -

a) Montrer qu'il existe β élément de $]0, \alpha[$ tel que la suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I,\ f_p(t) = \sum_{q=0}^{p} b^{(q)}(0) \Pi_q(t)$$

converge sur $]-\beta, \beta[$.

On note f la limite de cette suite de fonctions, définie sur $]-\beta, \beta[$.

b) Prouver que f est de classe C^n sur $]-\beta, \beta[$.

IV.G - Justifier que f est une solution de (L_b) définie sur l'intervalle sur $]-\beta, \beta[$.

IV.H - Prouver que f est de classe C^∞ sur $]-\beta, \beta[$ et que pour tout entier $k > 0$, on a :

$$\forall t \in]-\beta, \beta[,\ f^{(k)}(t) = \lim_{p \to +\infty} f_p^{(k)}(t) .$$

IV.I - Si $t \in \mathbb{R}^+$, on note $E(t)$ sa partie entière.

On se propose, dans cette question, de démontrer que f est développable en série entière sur $]-\beta, \beta[$. À cet effet, on introduit un élément x de $]-\beta, \beta[$ puis, pour tout entier p de $\mathbb{N}$, l'application e_p de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad e_p(t) = \frac{f_p^{(E(t))}(0) \cdot x^{E(t)}}{[E(t)]!}.$$

a) Montrer que, si $p \in \mathbb{N}$, e_p est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et préciser la valeur de son intégrale sur $\mathbb{R}^+$.

b) Exhiber une application e en escalier de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ intégrable telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |e_p(t)| \leq e(t).$$

c) Conclure.

IV.J -

a) Qu'en déduit-on pour les solutions de (L_b) sur l'intervalle $]-\beta, \beta[$?

b) Les résultats précédents sont-ils encore valables si α_0 n'est pas égal à 1 ?

••• FIN •••
