

Certes ces défauts se relèvent dans d'autres concours, dans d'autres cycles d'études et à d'autres niveaux. Une telle évolution ne semble pourtant pas justifier une remise en cause de l'exercice : le jury de rédaction reste attaché à la double nature de cette épreuve, qui sollicite harmonieusement le soin de la lecture et celui de l'écriture, le sens de l'analyse et celui de la synthèse, l'art du raccourci et celui du développement, le goût de la preuve et celui de la formule. Quelques remarquables copies ont pour notre plus grande satisfaction su cette année encore combiner ces talents.

Mathématiques

Mathématiques I

Le problème aborde une large partie du programme de PC : propriétés des suites, étude des séries entières et des séries numériques, intégrale fonction de sa borne supérieure, calcul d'intégrales, problème de majorations d'intégrales, études de limites, algèbre linéaire, raisonnement par récurrence. Il comporte beaucoup de questions simples pour mettre le candidat en confiance.

PARTIE I

Cette partie a été très mal réussie par les étudiants.

- A. La définition d'un espace vectoriel n'est pas toujours connue. La recherche d'une période commune à deux suites ultimement périodiques n'apparaît pas toujours nécessaire. Il y a confusion entre cardinal et dimension d'un espace vectoriel. La justification de la dimension infinie est, sauf dans quelques très bonnes copies, très imprécise.
- B. Peu d'étudiants savent utiliser le fait qu'une partie de \mathbb{N} non vide a toujours un plus petit élément. Pour démontrer que deux ensembles sont égaux, ils se contentent en général de montrer une inclusion. Beaucoup affirment que si l'on a deux entiers n et p avec $n < p$, nécessairement p est un multiple de n .
- C. 40% des étudiants raisonnent sans valeur absolue pour évaluer le rayon de convergence d'une série entière ; les calculs avec les sommes infinies se font sans aucune précaution.
- D. Paradoxalement, cette question est mieux traitée que la précédente et un bon contre exemple est souvent donné.

PARTIE II

Cette partie est plus concrète, puisqu'elle illustre la partie I par des exemples.

- A. Beaucoup d'étudiants reconnaissent la suite de Fibonacci mais obéissant à un réflexe taupinal, ils donnent la forme explicite du terme général, ce qui n'est guère utile pour étudier la parité.
- B. Pour beaucoup, une série dont le terme général ne prend que les valeurs $+1$ ou -1 ne peut être qu'alternée, ce qui conduit à de graves erreurs. Dans cette question, environ 20% des candidats ont trouvé deux rayons de convergence pour la série suivant la parité de l'indice. La continuité de la somme de la série en 0 n'est citée que dans les meilleures copies.
- C. Le troisième exemple est le mieux traité mais certains ignorent ce qu'est une division euclidienne, trouvant des restes fractionnaires. Les quotients suivants sont alors tous nuls... Une lecture trop rapide du texte a amené quelques étudiants à ne traiter les questions C2 et C3 que sur l'exemple du C1.

PARTIE III

C'est la partie qui a rapporté le plus de points aux candidats car elle est très classique.

- A. De nombreux étudiants se contentent de montrer que L est linéaire (ce qui est trivial) et oublient de montrer qu'elle va dans E .
- B. Les inégalités sont écrites sans valeur absolue, sans se soucier du signe des bornes de l'intégrale. Certains font preuve d'une mauvaise foi évidente, sortant la puissance de x de l'intégrale et retombant malgré tout sur le résultat annoncé. Les majorations de B3 sont souvent fausses (problèmes des bornes de I) et la justification de la valeur de la limite absente dans beaucoup de copies.
- C. L'intégration par parties est souvent correcte sans être toujours justifiée.
- D. La question D1 est rarement complète : il y a confusion entre linéarité et bilinéarité, la démonstration de l'injectivité par l'étude du noyau précède souvent la démonstration de la linéarité. Dans la question D2, la démonstration d'une inclusion (la plus facile) suffit à montrer l'égalité de deux ensembles. Dans la question D3, l'application H n'est jamais utilisée. L'étude de l'unicité est intégrée dans le raisonnement par récurrence, donc au procédé de construction, les vérifications sont partielles (degré ou parité

mais très rarement les deux).

E. La première partie de E1 est en général correcte et le reste n'est pratiquement jamais abordé.

PARTIE IV

Cette partie est très peu abordée sauf B1 et B2 que beaucoup ont dû voir en exercices.

Quelques remarques générales pour terminer : notons de graves fautes de raisonnement

- dans les raisonnements par récurrence : « supposons qu'une propriété est vraie pour tout n et montrons-la pour $n+1$ », mauvaise initialisation de la récurrence lorsqu'il faut faire deux vérifications au départ.
- l'incapacité à nier une assertion, par exemple « a est bornée ».

Signalons encore l'utilisation abusive de « il est clair que », « il est évident que », l'invocation d'un théorème du cours pour justifier une assertion sans citer le dit théorème ni vérifier que les hypothèses sont satisfaites, la facilité avec laquelle est signalée une erreur de texte lorsque le résultat obtenu n'est pas celui annoncé (jusqu'à trois erreurs dénoncées dans une même copie!). Enfin, le vocabulaire est très souvent imprécis (confusion entre nombre et chiffre, entre bornée et majorée).

Mathématiques II

Le sujet de cette année proposait d'étudier des produits de réflexions orthogonales correspondant aux différents éléments d'une base dont les angles relatifs sont des fractions de π , et des problèmes de cristallographie (réseaux stables). Il s'agit des premières étapes de la fameuse théorie des groupes de Coxeter et des systèmes de racines, combinatoire qui régit bon nombre de structures : algèbres de Lie, groupes algébriques, groupes finis simples, carquois (voir Bourbaki « Groupes et algèbres de Lie », en particulier § V.6).

Le sujet a permis de tester les connaissances des candidats en matière de transformations géométriques, dans le plan pour l'essentiel.

I.B. Il est dommage que le calcul des valeurs propres d'une matrice 2×2 puisse donner lieu à tant d'erreurs, du moment qu'un paramètre, fut-il un signe, se glisse parmi les coefficients.

Les puissances d'une matrice omnipotente $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont calculées sans erreur que par moins d'un candidat sur deux.

I.C.1. L'étude du signe de $x^2 + 2mxy + y^2$ s'est avérée un problème d'une grande difficulté. Très peu de candidats (moins de 5%) songent à rapprocher cette étude de celle, classique, du polynôme $x^2 + 2mx + 1$. On a vu beaucoup de comparaisons avec $(x - y)^2$ et $(x + y)^2$, parfois étayées, mais rarement conduites jusqu'à une véritable discussion des cas d'annulation.

I.C.5. Le résultat sur l'angle de la rotation résultant du produit de deux réflexions est parfois invoqué. Des erreurs toutefois dans le maniement de ces notions.

I.D.2. Les quelques dessins qui ne donnent pas un angle droit entre e_1 et f_2 leur attribuent un angle aléatoire – en général aigu ! Moins d'une dizaine de bons dessins seulement (voir *loc. cit.* p. 226).

Dans la suite, les parties **II.A** et **II.B** sont les seules sérieusement abordées.

II.A.1.c. Rappelons que vérifier une somme directe nécessite de montrer deux choses bien distinctes. Beaucoup de « demi-preuves ».

II.A.2.a. La formulation de la question a paru intimider beaucoup de candidats. Les autres ont souvent oublié la première étape de la récurrence.

II.A.2.b. L'idée de « base échelonnée » est trop rarement entrevue.

II.B. La notion de stabilité semble assez bien comprise. Mais les vérifications sont maladroitement faites. Elles font ensuite perdre de vue quelques évidences aux questions suivantes.

Pour conclure, notons que le sujet de cette année demandait souvent de raisonner : raisonnements par récurrence, sommes directes, ou simplement résultats non fournis par l'énoncé. Relevons que de nombreux candidats ont finalement joué le jeu.