

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Le sujet propose une démonstration de la loi du demi-cercle sur la répartition des valeurs propres de matrices symétriques aléatoires de grande taille. Il est découpé en quatre parties portant sur des thèmes variés du programme.

Dans la partie I, on établit l'inégalité de Hoffman-Wielandt qui permet, pour deux matrices symétriques  $A$  et  $B$ , de contrôler les différences entre les valeurs propres de  $A$  et de  $B$  par la norme euclidienne (norme de Frobenius) de  $A - B$ . La démonstration de cette inégalité utilise des outils d'algèbre bilinéaire et le théorème des bornes atteintes. La seconde partie propose de dénombrer les mots bien parenthésés de taille  $2n$  à l'aide de la fonction génératrice associée. Cette partie porte donc sur les séries entières. Dans la partie I, certaines questions sont assez élémentaires alors que d'autres sont plus délicates. La partie II, assez classique, ne comporte pas de très grosses difficultés.

La troisième partie, qui conduit à la loi du demi-cercle dans le cas borné, commence par quelques questions de calcul intégral. Ensuite, le résultat est obtenu en reliant les mots bien parenthésés et les cycles de longueur  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On trouve alors quelques questions assez délicates de probabilités et de dénombrement.

La dernière partie, comprenant des questions de probabilités et d'analyse assez fines permet d'étendre le résultat à n'importe quelle fonction continue et bornée.

## Analyse globale des résultats

Les parties I et II sont abordées dans la quasi totalité des copies. Il en est de même pour la sous-partie III.A. La fin de la partie III et surtout la partie IV ne sont sérieusement abordées que dans les toutes meilleures copies.

Un malus a été appliqué à certaines copies particulièrement mal écrites, mal présentées ou lorsque les calculs et raisonnements s'enchaînent sans qu'on puisse clairement différencier la fin d'une question et le début de la suivante.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

### I Inégalité de Hoffman-Wielandt

Le début de cette partie, très largement abordé, a été convenablement réussi. Des arguments imprécis, en particulier sur les propriétés de la trace, ont été évidemment sanctionnés. Par contre une utilisation correcte du théorème spectral (même si elle n'a pas permis de conclure) a été valorisée. Le jury a apprécié les calculs précis et détaillés dans la question **Q3**.

Il y a eu moins de réussite dans la question **Q4**. Certains candidats pensent qu'il suffit de montrer que  $f$  est minorée pour conclure qu'elle admet un minimum. Heureusement, les trois quarts des candidats pensent au théorème des bornes atteintes et en vérifient les hypothèses.

La question **Q5**, globalement assez bien réussie, a aussi montré un manque de rigueur dans certaines copies. Par exemple, on ne peut pas exprimer  $f(E_{ij})$  à l'aide d'une somme sur les indices  $i$  et  $j$ . Ce manque de rigueur s'est retrouvé dans la question suivante où les candidats ont naturellement pensé à considérer  $x = 1 - m_{ii}$  sans chercher à vérifier que la matrice ainsi obtenue est dans  $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$  (en particulier

à coefficients positifs). Ici, comme à d'autres occasions, le jury a valorisé les candidats qui portent un regard critique sur leurs réponses.

Le jury a constaté dans la question **Q7** des arguments très imprécis utilisant plus ou moins implicitement que le minimum est atteint en un unique point ou que l'inégalité précédente est stricte.

Dans la question **Q8**, le calcul de  $f(I_n)$  a parfois donné lieu à des simplifications mystérieuses pour passer d'une somme double à une somme simple. Parmi les candidats ayant pensé à considérer la matrice  $(p_{ij}^2)_{1 \leq i, j \leq n}$ , certains l'ont confondue avec  $P^2$ .

## II Dénombrement des mots bien parenthésés

Dans la question **Q10**, les démonstrations par récurrence rencontrées ont rarement permis de conclure correctement dans la mesure où elles utilisent des inégalités non justifiées entre  $C_{n+1}$  et  $C_n$ . Rappelons ici qu'une majoration de  $C_n$  pour tout  $n$  ne peut pas conduire à une majoration de  $C_{n+1}/C_n$  et que la règle de d'Alembert n'est pas une condition nécessaire et suffisante de convergence.

Dans la question **Q11**, comme dans toutes les questions où le résultat est dans l'énoncé, les correcteurs attendent bien évidemment des arguments encore plus précis que dans une question plus ouverte.

Pour la question **Q12**, le produit de Cauchy semble bien maîtrisé. Le jury a juste noté quelques imprécisions dans la gestion des indices.

La question **Q13** a, au contraire, été très peu réussie. Le point de départ logique consistant à considérer  $x_0$  tel que  $f(x_0) = 0$  n'a pas été souvent envisagé. De même, peu de candidats ont résolu l'équation du second degré d'inconnue  $F(x)$  donnée par la question **Q12**. Même si elle permet de conclure pour la question **Q13**, la dérivation n'apporte rien à la question **Q14**.

Les réponses sont globalement décevantes pour la question **Q15**. Même lorsque la formule initiale du développement de  $(1+x)^a$  est correcte, les manipulations qui suivent sur les coefficients ont rarement été satisfaisantes.

Pour la question **Q16**, certains candidats qui avaient commis une erreur de calcul au préalable signalent honnêtement qu'ils constatent qu'ils ne parviennent pas au bon résultat. Le jury a valorisé cette attitude.

## III Loi du demi-cercle, cas uniformément borné – IV Loi du demi-cercle, cas général

Les trois premières questions de cette partie, qui sont aussi les dernières questions traitées par la majorité des candidats, ont révélé une maîtrise insuffisante des techniques de base du calcul intégral : pas de modification des bornes lors d'un changement de variable, primitives ou dérivées fausses pour l'intégration par parties.

Dans la suite, il y a eu des tentatives plus ou moins fructueuses sur quelques questions. Rappelons que l'attente du jury est plus forte lorsque l'énoncé demande de démontrer un résultat : il faut utiliser des résultats précis du cours ou des questions antérieures (en indiquant évidemment le numéro de la question). Pour un certain nombre de candidats, il aurait été plus judicieux de soigner le début du problème que de grapiller des points par-ci par-là vers la fin du sujet. Par exemple, la question **Q36**, abordée par environ 500 candidats, n'a été réussie que par une dizaine d'entre eux ; une paraphrase de l'énoncé ne constituant pas une preuve.

La fin du sujet nécessite de bonnes compétences en analyse et en probabilités, pour utiliser à bon escient la troncature des variables aléatoires et l'approximation des fonctions continues (contrairement à ce que nous avons pu lire dans certaines copies, le théorème de Stone-Weierstrass n'est valable que sur un segment).

### Conseils généraux

Voici quelques conseils généraux inspirés par la lecture des copies.

- Ne pas se précipiter, prendre le temps de donner tous les arguments nécessaires et de calculer avec précision.
- Prendre du recul sur les résultats et vérifier qu'ils ne sont pas incohérents avec des résultats ultérieurs. Par exemple, la réponse à la question **Q17** est dans la question **Q20** ; pour répondre à la question **Q17**, il suffit alors de trouver le bon argument d'imparité pour justifier la nullité de l'intégrale.
- Référencer les résultats utilisés dans une question ultérieure, dérouler complètement les calculs et ne pas énoncer directement un résultat.
- Il est inutile lorsque cela n'est pas demandé de redémontrer un résultat du cours. Par exemple, la relation  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  ou le développement en série entière de  $(1 + u)^a$  peuvent être utilisés directement.
- Les correcteurs apprécient davantage une réponse partielle et annoncée comme telle par rapport à une réponse prétendument complète mais où il manque des arguments. Par exemple, pour la question **Q4**, mentionner le théorème des bornes atteintes avec ses hypothèses précises rapportait une partie des points.

### Conclusion

Comme les années précédentes, les correcteurs ont été impressionnés par les quelques candidats arrivant à traiter quasiment intégralement le sujet. Ceci ne doit pas inciter à répondre précipitamment aux premières questions. Il faut absolument apporter des réponses complètes et précises même si cela empêche d'aller très loin dans le sujet. Quoi qu'il en soit, le jury attend des réponses honnêtes et cohérentes entre elles même si elles ne sont que partielles.

Le sujet est très long, la fin comporte des questions très difficiles ; les réponses aux 25 premières questions constituent déjà une très bonne copie.