

Mathématiques 1

Présentation du sujet

L'objet de ce problème était de donner une approximation de la somme des séries de Riemann convergentes. Pour cela, on étudiait le reste $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{\infty} 1/k^\alpha$

Dans la première partie, on donnait une première approximation du reste. Cette méthode se généralisant mal, on utilisait dans la deuxième partie une formule de Taylor pour obtenir simplement un développement asymptotique du reste. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne donne aucun contrôle de l'erreur.

Dans la troisième partie, on retrouvait à partir de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin le même développement asymptotique avec une expression de l'erreur assez satisfaisante.

Dans la dernière partie, on étudiait de manière assez précise le contrôle de cette erreur, pour conclure que les formules sommatoires étudiées ne sont pas nécessairement convergentes.

Analyse globale des résultats

L'épreuve, très progressive dans chacune de ses parties, a permis aux étudiants sérieux de montrer leur rigueur, leur connaissance du cours et leur habileté à manier l'analyse fine.

Les connaissances nécessaires étant pour la plus grande partie du problème, au programme de première année, la compétence et la maîtrise ont pu être jugées.

Dans la Partie I, la question I.A.2 qui était une « question de cours », s'est révélée très classante. La formule de Taylor avec reste intégral encore mal connue du tiers des candidats a permis, elle aussi, de trier les candidats.

La partie II a été l'occasion dans la question II.A.1 de voir ceux qui font la différence entre condition nécessaire et condition suffisante. Cette partie a très rarement été bien traitée.

La partie III, pourtant classique, a été, surtout dans la question A.1, mal comprise par les candidats. L'énoncé demandait une existence et une unicité et plus de trois-quart des copies proposent seulement une preuve d'unicité.

De nombreux résultats ayant été donnés dans l'énoncé, les correcteurs ont été très attentifs aux justifications données. « Par produit de Cauchy » ne constitue pas une preuve.

La question III.A.2 a été la fin de copie du plus grand nombre de candidats.

La partie IV a rarement été abordée. Seule une poignée de candidats a réussi à donner une réponse correcte à la question IV.B.2.

Commentaires sur les réponses apportées

I.A.1 Signalons qu'un dessin ne peut constituer une démonstration.

I.A.2 On a lu très souvent que la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$ est décroissante sur \mathbb{R}_+^* quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, qu'une suite majorée et minorée par deux suites convergentes converge. On lit très souvent $\sum_{n=p}^\infty u_n$ avant la preuve de l'existence d'une telle somme.

I.B.2 Rappelons qu'un théorème s'énonce avec des hypothèses. Rares sont ceux qui donnent des conditions d'application du théorème de Taylor avec reste intégral. Signalons qu'une affirmation non justifiée, même juste, n'est pas une preuve. Des candidats ont ainsi affirmé, sans l'ombre d'une justification, que la fonction $t \mapsto (k+1-t)^2/t^{\alpha+2}$ était décroissante.

II Rappelons que le produit (de Cauchy) de séries convergentes n'est, en général, pas une série convergente.

Les correcteurs se sont interrogés sur la dénomination de série télescopique. Les séries $\sum (-1)^n$ et $\sum_{n \geq 1} 1/(n(n+1))$ en sont-elles ? Ils préféreraient l'expression, « par télescopage » pour exprimer que la somme finie $\sum_{k=n}^{n+p} (u_{k+1} - u_k)$ est égale à $u_{n+p+1} - u_n$.

Rappelons qu'il ne sert à rien de majorer le module de la somme partielle d'une série à termes complexes pour prouver la convergence de la série.

Pour de nombreux candidats $\sum_{i=2}^{p+1} 1/i! < \sum_{i=0}^\infty 1/i! = e^0 = 1$. Nous laissons aux futurs candidats le soin de trouver le nombre d'erreurs et/ou maladresses figurant dans ces relations.

III Disons seulement que le propos « par produit de Cauchy » ne peut constituer une démonstration.

Conseils aux candidats

- Préciser les hypothèses des théorèmes.
- Préciser les hypothèses de récurrence.
- Éviter : ainsi, par récurrence immédiate, par identification, par analogie, série croissante, série positive, série majorée, l'intégrale converge en $+\infty$, les noms de théorèmes dont on n'est pas sûr, tels que Taylor Young à la place de Taylor-polynômes, Taylor Lagrange à la place de Taylor avec reste intégral,...
- Alors que le « théorème d'encadrement » est clair, éviter les dénominations enfantines, telles que théorème des gendarmes, du squeeze, du pincement, de l'étau,...
- Numéroté ses copies.
- Respecter la numérotation des questions : ne pas remplacer II.A.2)b) par b).
- Souligner les résultats ou tirer un trait entre les questions.

Les trois derniers conseils peuvent paraître superficiels, mais ils contribuent à ne pas « braquer » le correcteur avant la lecture de votre copie.

Conclusions

En conclusion, nous dirons que, malgré ses nombreuses questions abordables par les étudiants de MPSI, cette épreuve a permis de classer correctement les étudiants sérieux.