Mathématiques

Mathématiques I

L' épreuve se proposait de mettre en place un algorithme conduisant au calcul de la longueur de l'ellipse et reposant sur la théorie des séries de FOURIER. Le sujet était intéressant mais présentait quelques aspects un peu abrupts. Cela peut expliquer en partie le fait que plusieurs questions n'ont été que partiellement ou pas du tout abordées. Par ailleurs on est obligé de constater que trop de candidats méconnaissent les règles de calcul relatives aux nombres complexes et n'ont pas assimilé les concepts de base de l'analyse, de l'algèbre et de la géométrie. Pour illustrer ces remarques, on se propose de regarder question par question le déroulement du problème.

Partie I

I.A - Seuls 5 % des candidats connaissent la signification géométrique du paramètre t intervenant dans le paramétrage $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

I.B - De façon générale, le fait que B_r est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est fort mal établi car la notion de rayon de convergence d'une série entière n'est pas maitrisée. De plus l'égalité dans $S_r = 2$ est souvent indiquée mais n'est jamais établie de façon correcte : le seul argument proposé est qu'un élément de S_r est défini par une relation de récurrence à trois termes.

I.C - Généralement le théorème de Parseval est énoncé formellement mais la suite de la question n'est que très rarement faite et les rares candidats qui l'abordent confondent produit scalaire et produit hermitien de telle sorte que leur preuve s'appuie sur l'égalité $\| f+g \|^2 = \| f \|^2 + \| g \|^2 + 2(f/g)$. Ensuite la convergence de la série n'est pratiquement jamais établie : on ignore de façon générale la majoration $|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$.

I.D - La méconnaissance des nombres complexes apparait ici de façon flagrante, du coup les points relatifs à cette question sont rarement attribués.

I.E - Si l'on peut comprendre que beaucoup de candidats aient oublié la formule de la longueur d'un arc paramétré, que doit-on penser de ces candidats qui prétendent que $L(a,b) = \pi ab$ ou $\pi\sqrt{a^2+b^2}$ ou que $\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \sqrt{a^2+b^2}$ ou qui sont incapables (c'est le cas de 80 % des candidats) d'écrire $a_0(f)$ en remplaçant r par $\dfrac{a-b}{a+b}$?

Partie II

II.A - La plupart des copies détermine le rayon de convergence de la série entière en formant le rapport $\dfrac{\alpha_{nn}}{\alpha_n}$ sans justifier la non nullité de α_n.

II.B - L'équation différentielle est souvent obtenue, parfois résolue formellement mais très rares sont les copies qui précisent le théorème du programme qui justifie le cacul.

II.C/D - Ces questions n'ont été traitées avec plus ou moins de succès que par un très petit nombre de candidats.

II.E - Quelques candidats ont vu que le théorème de convergence trouvait sa place dans cette question mais la totalité de la question n'est résolue que de façon rarissime.

II.F - L'équivalence demandée n'est pratiquement jamais obtenue mais de nombreux candidats écrivent que ce résultat confirme le fait que $a_n(f_r)$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Seuls une dizaine de candidats signale que f_r est une fonction de classe C^∞ de telle sorte que le résultat obtenu confirme que, pour tout entier naturel ρ, $a_n(f_r)_{n\to\alpha} = 0\left(\dfrac{1}{n^\rho}\right)$.

Partie III

III.A - L'équation différentielle demandée n'est pratiquement jamais obtenue, la plupart des candidats ne voyant pas que $(f_r(t))^2 = 1 - 2r\cos t + r^2$. L'appartenance de la suite $(a_n(f_r))_{n\geq 0}$ à B_r n'est obtenue que par une dizaine de candidats.

III.B - Le calcul matriciel est souvent fait de façon convenable, par contre les programmes proposés ne sont pas toujours convaincants et de nombreux candidats ne précisent pas le langage choisi.

III.C - Dans cette question qui était totalement indépendante de ce qui précèdait, on voit de nombreux candidats parvenir à obtenir à l'aide d'une récurrence correcte sur l'entier ρ, qui pour tout $n \geq \mathbb{N}$ et tout $\rho \in \mathbb{N}^*$,

$$|\mu_{n+p} - l| \leq k^\rho |\mu_n - l| + \sum_{j=1}^{\rho} k^{\rho-j}\varepsilon_{n+j}$$

mais rares sont ceux qui, à partir de là, parviennent à conclure que $(\mu_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.

Enfin la question (III,D) n'est pratiquement jamais abordée, quant à la question (III, E) elle est systématiquement ignorée.

Partie IV

IV.A - Ici les candidats qui avaient traité la question (III,B) ont su tirer leur épingle du jeu.

IV.B - Cette question a souvent été faite mais les erreurs de calcul sont nombreuses.

IV.C - Cette dernière question n'a pratiquement jamais été abordée et quand elle l'a été les résultats obtenus ne sont que très partiels.

En conclusion, on ne peut qu'encourager les futurs candidats à maitriser les techniques de calcul, à s'approprier les notions fondamentales, à savoir utiliser et faire fonctionner dans le cadre demandé les théorèmes fondamentaux et d'exercer un esprit critique vis-à-vis des résultats proposés. L'observation de ces quelques principes ne pourrait qu'améliorer la qualité des travaux fournis par les futurs candidats.

Mathématiques II

Le sujet de cette année se proposait de tester, par le biais de questions variées, l'acquisition des techniques mathématiques de base censées être assimilées au terme de deux années de classes préparatoires.

On va le voir dans les lignes qui suivent, une forte proportion de candidats n'a toujours pas perçu les règles inhérentes à la rédaction d'un sujet d'écrit : une affirmation ne peut valoir une preuve, la simple formule $u = 1 - t$ (souvent sans explication, au fil du calcul) est loin d'être aussi précise que « *l'on effectue le changement de variable affine u = 1 - t* », dire que *1/2 est centre de symétrie* est du pur verbiage. En outre, les résultats des calculs doivent être achevés (les polynômes doivent en particulier être réduits et ordonnés). Il était particulièrement ridicule de donner comme réponse $L_1 = 6\left(x^2/2 - x^3/3\right)$, ce d'autant plus que l'énoncé évoquait des polynômes à coefficients entiers.

On pourrait multiplier à l'envi les exemples de ce type, tant est flagrant chez les candidats le désir d'avancer vite dans l'énoncé, tactique dont il faut encore et toujours souligner les effets négatifs et la rentabilité douteuse.

Le parti pris affiché par l'énoncé de privilégier les questions ouvertes a obligé les candidats à prendre des initiatives, et cela a grandement contribué à la sélectivité et à l'efficacité de l'épreuve.

La partie I a apporté à la quasi totalité des candidats plus de points que les trois autres réunies : autant dire qu'une rédaction soignée de ces questions élémentaires pouvait garantir une note finale honorable, mais qu'inversement un survol hâtif de ces questions était de mauvais augure pour la suite du problème.

Il a été fréquent de voir apparaître une discussion, bien inutile, sur la parité de m, ou de vaines tentatives de raisonnement par récurrence, le calcul de *L1* et *L2* ayant été compris comme une « amorce ».

Dans le **I.A2**, même s'il n'était pas nécessaire de s'appesantir sur le changement de variable, il convenait de le faire apparaître explicitement et non de se contenter de signaler à la volée un changement de notation qui pouvait représenter aussi n'importe quoi d'autre.

Dans le **I.B2**, peu de candidats pensent à introduire une fonction auxiliaire. Les autres auraient dû se rendre compte qu'il était inutile de rédiger le seul calcul du signe de L'' s'ils étaient incapables de conclure ensuite. Heureusement pour ceux-ci, ce signe allait de toute façon servir dans la question suivante.

Dans le **I.C**, la plupart des copies n'était pas à une contradiction près : trouver $y = 1 - x$ dans le premier alinéa rendait douteuse la réponse $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$ dans le suivant.

Dans le **II.A**, la notion d'*idéa*l, et celle de *générateur*, se sont révélées bien lointaines. Noyau et image ont été fort rarement exhibés, et encore plus rarement établis rigoureusement, les preuves se bornant souvent à une seule inclusion présentée comme une égalité.

La réponse complète à la question **II.B** a été exceptionnelle ; dans le meilleur des cas, les candidats s'arrêtent au développement taylorien de R et S sans reconnaître ces polynômes.

La même remarque vaut pour le **II.C2**. Au mieux, les copies évoquent les valeurs propres possibles d'un projecteur.

Au **III.A**, pour quelques intuitions correctes, combien de calculs laborieux !

Au **III.B**, exceptionnels sont les candidats qui savent quelles vérifications effectuer.

Au **III.C**, les deux droites sont rarement reconnues, et exceptionnellement limitées. Pour les rares candidats parvenus à l'expression correcte de x_3, la nécessité de ne trouver que deux points d'intersection avec Oy les a assez souvent conduit aux pires malhonnêtetés (« oubli » d'une racine carrée négative ou de la racine nulle).

La partie **IV** a vu le triomphe de la devinette et de l'approximation en matière de démonstration. La distinction entre *forme linéaire* et *fonctionnelle affine* n'est pas claire, et la confusion entre *extremum local* et *extremum « absolu »* est quasi générale. Le rang de la famille (φ_i) est presque toujours faux (la valeur de 4 étant même un moindre mal, tant l'éventail des réponses a été large !) On a souvent cru que Δ était l'image réciproque de $[0, 1]$, ou que l'image réciproque d'un compact par une application continue est compacte. Avec cela, on n'était pas près d'arrondir son total avec cette partie déjà plus consistante.

À ces remarques ponctuelles s'ajoutent les classiques doléances quant à la désinvolture dans la rédaction ou la présentation, dont les