Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet propose une introduction au calcul ombral consistant à justifier des manipulations formelles à l'aide d'endomorphismes particuliers sur $\mathbb{K}[X]$.

La partie I est constituée de l'étude de quelques exemples d'applications définies sur $\mathbb{K}[X]$. Il s'agit de démontrer que ces applications sont des endomorphismes, inversibles ou non selon les cas. Cette partie nécessite des connaissances sur l'algèbre linéaire et le calcul intégral.

La partie II introduit les notions d'endomorphismes shift-invariants et d'endomorphismes delta. La compréhension de ces notions est testée sur les exemples précédents, puis le sujet propose d'établir quelques propriétés générales de ces endomorphismes.

Dans la partie III, le sujet définit la suite de polynômes associée à un endomorphisme delta, ce qui permet de généraliser la formule de Taylor sur les polynômes.

Le calcul ombral apparait véritablement dans la dernière partie. On y démontre en particulier une formule de duplication des polynômes de Laguerre.

Analyse globale des résultats

Les parties I et II sont abordées significativement dans quasiment toutes les copies. La partie III n'apparait que dans une grosse moitié des copies et la dernière partie n'est abordée que par une petite minorité des candidats.

La partie I a bien joué son rôle d'introduction en proposant des questions abordables puisque les résultats globaux y sont plutôt corrects. De plus, elle a permis de classer convenablement les candidats les plus fragiles.

Nous avons noté des efforts sur la présentation et la mise en forme des raisonnements. Malheureusement, cela ne concerne pas tous les candidats et un malus a été appliqué à certaines copies particulièrement mal écrites, mal présentées, ou lorsque la numérotation des questions manque de précision.

Nous avons observé de la fragilité chez beaucoup de candidats, y compris parmi ceux qui ont rendu de bonnes copies : une solution excellente à une question assez difficile puis, une erreur grossière ensuite (ou le contraire).

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Étude d'endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$

Il n'y a pas de question vraiment difficile dans cette partie mais les réponses apportées ont trop souvent manqué de rigueur.

La notation $p(X+a)$ a parfois été confondue avec un produit. Dans ce cas, E_a n'aurait pas pu être un automorphisme.

Pour vérifier qu'une application f est un endomorphisme de E, il faut montrer que f est une application de E dans E et que f est linéaire (pour cela $f(P+Q) = f(P) + f(Q)$ pour tout (P, Q) n'est évidemment pas suffisant).

Si p est un polynôme, il n'est pas immédiat que $x \mapsto \int_x^{x+1} p(t)\,\mathrm{d}t$ soit une fonction polynomiale. Un argument du style « il est clair que » n'est bien sûr pas accepté.

Pour traduire qu'un polynôme p est de degré n, il ne suffit pas de dire que p s'écrit $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

De même, pour justifier que, si p est de degré n, alors Jp est de degré n, il ne suffit pas de justifier que les termes de degré $n+1$ se simplifient.

La convergence d'une intégrale généralisée doit commencer par l'étude de la continuité de l'intégrande sur l'intervalle. Pour la question 4, il ne suffit pas de parler de continuité en 0.

Pour réaliser une intégration par parties, la convergence du crochet doit être faite avant d'écrire la relation.

À plusieurs reprises dans le sujet, il était nécessaire de montrer qu'un endomorphisme conservant le degré est inversible. Évidemment, il était possible de le faire soigneusement une première fois (par exemple dans la question 3) et de s'y référer ensuite. Par contre, $\mathbb{K}[X]$ n'étant pas de dimension finie, il ne suffit pas de montrer l'injectivité.

Formule de Taylor pour les endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$

Q6. La vérification de E_a shift-invariant nécessitait de considérer un autre scalaire. Il n'est pas suffisant d'étudier $E_a \circ E_a$. Pour l'égalité $E_a \circ J$, les correcteurs ont souvent vu des successions d'égalités sans justification ce qui, bien sûr, ne rapporte pas de point.

Q7. La notion d'algèbre ne semble pas très bien maitrisée : démontrer que l'ensemble des endomorphismes shift-invariants est une algèbre ne pose pas de difficulté technique à condition de connaitre la définition d'algèbre.

La seconde partie de la question a été l'occasion de tester la capacité des candidats à fournir un contre-exemple. Par exemple, dire que, si u et v sont deltas, $uX + vX$ n'est pas forcément non nul n'est pas suffisant. De même, affirmer qu'on peut choisir u et v tels que uX et vX soient opposés nécessite de justifier qu'il existe bien de tels u et v. Il est indispensable de fournir des contre-exemples explicites, ce qui était rendu possible par la question précédente.

Q9. Beaucoup de candidats interprètent mal la remarque cruciale de la question 8 : les expressions $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$ sont bien, quel que soit le polynôme p, des combinaisons linéaires (autrement dit : des sommes finies), car les termes sont nuls à partir d'un certain rang. Il n'en est en revanche pas ainsi des endomorphismes $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$, où tous les termes peuvent à priori être non nuls (et sont bien génériquement non nuls). Les règles de calcul usuelles dans l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$, ou même dans la sous-algèbre commutative engendrée par D, ne permettent donc pas de manipuler directement de telles expressions, par exemple par une formule de produit de Cauchy : le retour aux évaluations en un polynôme p sont indispensables, au moins dans cette partie.

Q11. Le sens direct est très délicat à établir et n'a pas rencontré un grand succès. Par contre, pour la réciproque, il suffisait d'utiliser la question 9. À la place, beaucoup de candidats se sont contentés de calculs non justifiés sur les sommes infinies.

Q12. Aucune mention de la formule de Fubini ou de la notion de famille sommable ne semble judicieuse ici : cette appellation semble hors de propos si on voit qu'on calcule sur des sommes finies en prenant l'image d'un polynôme donné par les endomorphismes considérés ; et, si on en reste aux sommes infinies, l'espace dans lequel on calcule n'est pas justiciable de la formule de Fubini telle qu'elle figure dans le programme.

Q13. La reconnaissance d'une formule de Taylor, d'une formule de Taylor avec reste intégral (en précisant pourquoi le reste est nul), d'une formule de Taylor pour les polynômes a été acceptée. En revanche, les mentions des formules de Taylor-Young ou Taylor-Lagrange ont été refusées.

II.C. Au début de cette sous-partie, il est indiqué qu'on y applique la question 11 aux endomorphismes définis en I. On aurait donc pu espérer que les candidats calculent les Jq_k et les Lq_k. Malheureusement cela n'a pas toujours été le cas.

Q21. Le jury attendait le retour à une évaluation en un polynôme pour manipuler une somme finie ou au moins une explication justifiant la « factorisation » par D dans la somme infinie.

Suite de polynômes associée à un endomorphisme delta

Le début de cette partie est un peu technique et demandait une bonne compréhension des différents objets introduits. Par contre, la sous-partie III.C est constituée de deux questions assez élémentaires d'algèbre linéaire. Pour **Q28**, les arguments ont parfois manqué de précision (par exemple oubli de vérification du cardinal). Dans la **Q29**, nous avons trouvé beaucoup de polynômes caractéristiques de degré n pour une matrice de taille $n + 1$.

De même, les questions **Q30** et **Q31** pouvaient être traitées sans difficulté en admettant la question 25. Ces vérifications ont assez souvent manqué de rigueur quant à la rédaction.

Un peu de calcul ombral

En dehors de la sous partie IV.A, peu de candidats ont abordé cette dernière partie.

Pour **Q35**, la formule de Leibniz est assez rarement évoquée. Certains candidats l'ont redémontrée dans ce cas, d'autres l'ont contournée avec des calculs laborieux.

Conseils généraux

Voici, pour finir, quelques conseils généraux inspirés par la lecture des copies.

- Ne pas se précipiter et prendre le temps de donner tous les arguments nécessaires. Cela n'a pas toujours été le cas, même dans de très bonnes copies par ailleurs.
- Faire attention à la nature des différents objets : polynôme, endomorphisme...
- Ne pas utiliser des notions ou des résultats hors programme sans les redémontrer.
- Ne pas hésiter à utiliser, pour répondre à une question donnée, un résultat antérieur dans le sujet. Pour cela, il est évidemment indispensable de vérifier les hypothèses d'application.

Conclusion

Cette année, aucune copie n'a traité correctement la totalité ou presque du sujet ; cela est certainement dû à sa longueur. Le jury a tout de même eu le plaisir de lire des copies montrant une très bonne compréhension des différentes notions du programme et celles introduites dans le problème.

La relative simplicité des premières questions a permis d'éviter trop de très mauvaises copies et a permis au jury d'échelonner correctement les notes.

La majorité des candidats rendent une copie avec une écriture bien lisible et une bonne présentation. Nous invitons les autres à suivre cet exemple afin d'éviter d'être pénalisés par un malus.