

## 1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

Nous attirons l'attention des candidats sur le fait que le sujet de mathématiques est écrit pour évaluer les compétences sur une large partie du programme de PSI. Parmi ces compétences, sont évaluées :

- la connaissance précise des énoncés et démonstrations des résultats du cours et la capacité de les appliquer ;
- la qualité d'exposition d'un argument, la rigueur ;
- la présentation de la copie.

## 2/ REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet comportait deux problèmes indépendants.

Le premier problème était un problème d'analyse composé de deux parties. La première partie portait sur l'étude de deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ , l'une au moyen d'une intégrale à paramètre et l'autre comme somme d'une série de fonctions. Il s'agissait d'utiliser des résultats fondamentaux du programme de CPGE pour démontrer que ces fonctions sont indéfiniment dérивables mais non développables en séries entières. La deuxième partie proposait une démonstration du théorème de Borel, assurant l'existence, pour toute suite réelle  $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$ , d'une fonction indéfiniment dérivable  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(p)}(0) = b_p$ .

Le deuxième problème était décomposé en deux parties, la première portant sur l'étude des éléments propres de certaines matrices tridiagonales symétriques. La seconde partie proposait l'étude d'un système différentiel défini par une matrice tridiagonale symétrique en passant par l'étude du calcul de déterminants par blocs.

Ce sujet était assez long et peu de candidats ont abordé la totalité de celui-ci. La majorité des questions étaient très abordables, balayant un grand nombre de compétences attendues dans le programme. Les candidats avaient donc toute matière pour exprimer leur savoir-faire. Par manque de rapidité et d'aisance, c'est finalement peu de questions qui ont été traitées.

La majorité des candidats ont abordé les questions dans l'ordre (ceux qui ne l'ont pas fait n'ont en général pas eu plus de succès).

La présentation des copies est satisfaisante et peu sont illisibles. La quantité et/ou proportion de mots en français est très variable d'une copie à l'autre. Certaines copies se démarquent par la pauvreté de la rédaction.

Enfin, il convient de souligner qu'il est contre-productif de tenter de masquer les difficultés rencontrées :

- le raisonnement « par analogie » est trop souvent utilisé, cachant les difficultés là où on attend du candidat de la rigueur ;
- lorsque les résultats à obtenir sont donnés, il arrive trop souvent que des erreurs de calculs présentes au début disparaissent miraculeusement pour finalement donner le bon résultat.

### 3/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

#### PROBLÈME 1

**Q1 – Q3 :** Un bon nombre de candidats parviennent à fournir des arguments pour justifier l'existence de  $\Gamma_p$ , en invoquant parfois les croissances comparées. L'intégration par parties attendue pour trouver une relation entre  $\Gamma_{p+1}$  et  $\Gamma_p$  sent le déjà vu ; malgré tout peu de candidats prennent la précaution d'intégrer sur un segment avant de passer à la limite.

**Q4 :** La présence du  $i$  imaginaire donne des majorations de complexes absurdes, mêmes chez les candidats qui écrivent les barres verticales du module. Les tentatives d'appliquer correctement le théorème attendu ici sont néanmoins assez sérieuses dans l'ensemble, les candidats ignorant complètement le cours et se contentant de dériver sous le signe intégrale étant en minorité.

**Q5 :** Le lien entre  $f$  et sa série de Taylor est rarement cité. Quant au rayon de convergence, une grande variété de résultats est observée : rayon infini, rayon complexe, rayon dépendant de l'entier de sommation...

**Q7 :** La « disparition » du  $i^p$  est souvent soit non justifiée, soit incorrecte et on observe parfois de nouveau des inégalités entre nombres complexes.

**Q9 - Q10 :** Bien traitées dans l'ensemble. La rédaction laisse parfois à désirer avec des  $\Psi(x)'$  observés.

**Q11 :** Un grand nombre de candidats pensent à réutiliser la décomposition en éléments simples, cependant la dérivation du second terme est souvent laborieuse, entre ceux qui refont entièrement une récurrence et d'autres qui invoquent « l'analogie ».

**Q12 :** Certains candidats se lancent dans une périlleuse écriture sous forme de somme pour tenter d'obtenir la première inégalité. La seconde inégalité est démontrée plus souvent.

**Q13 :** Trop souvent abordée en essayant de redémontrer Q9-12 avec  $\alpha \neq 1$ , ce qui conduit à de longs calculs souvent faux ou des « analogies » non justifiées.

**Q14 :** Ceux qui reconnaissent la formule du binôme arrivent en général à montrer la majoration.

**Q15 :** La première partie est réussie, la seconde moins.

**Q17 :** Peu réussie, la plupart se contentant de montrer la convergence simple.

**Q19 :** Abordée par une minorité de candidats, pratiquement personne ne fournissant une explication convaincante.

#### PROBLÈME 2

**Q21 :** Cette question trie les candidats selon leur rigueur : certains se perdent dans les indices ou encore noient le poisson en invoquant le maximum pour majorer.

**Q22 :** Quelques candidats oublient de mentionner que la matrice est à coefficients réels.

**Q24** : La réponse est très souvent incomplète, les candidats se contentent d'indiquer que  $\cos$  est compris entre  $-1$  et  $1$ .

**Q25** : Cette question laisse également une impression de déjà vu et le résultat obtenu est généralement correct.

**Q26** : C'est souvent après une initialisation simple que le candidat se rend compte qu'il a besoin d'une hypothèse de récurrence plus forte que d'habitude. Certains se noient dans les formules de trigonométrie, d'autres sont prêts à tout pour arriver au résultat.

**Q27** : La plupart des candidats se rendent compte qu'ils ont  $n$  valeurs propres sous la main mais le justifient rarement.

**Q28 - Q29** : Réussies dans l'ensemble. Beaucoup de candidats redémontrent à la main que  $E$  est un sous-espace vectoriel.

**Q30** : Question non traitée ou ratée, ce qui est plutôt étonnant. Il s'ensuit qu'il en est de même pour la question suivante.

**Q32** : Peu abordée.

**Q33-Q34** : Les candidats ne sont pas impressionnés par le calcul par blocs, même si les moins à l'aise s'égarent par manque de compréhension des objets, confondant parfois la matrice et son déterminant...

**Q35-Q36** : Ces questions, plus sélectives, sont comprises par une minorité.

**Q37-Q39** : Les candidats fournissent trop souvent un raisonnement incomplet.

**Q40** : Bien réussie dans l'ensemble.

**Q41 - Q44** : Ces dernières questions ont attiré les candidats plus à l'aise à traiter un exemple. Seuls les plus rapides arrivent à la fin du sujet, les calculs étant plus ou moins bien menés selon le degré de précipitation.

## 4/ CONCLUSION

Pour conclure, voici quelques points déjà évoqués sur lesquels les correcteurs souhaitent insister :

- il est indispensable d'utiliser correctement le langage mathématique et d'être vigilant sur la nature des objets utilisés ;
- il est inutile et même préjudiciable de tenter de « trafiquer » les calculs ou de raisonner par « analogie » sans justification précise ;
- Il est impératif de citer toutes les hypothèses des théorèmes utilisés et d'identifier précisément à quel moment quelle hypothèse est vérifiée.