Les calculatrices sont autorisées

NB. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remettre à chaque candidat une feuille de papier millimétré

Problème 1

On considère l'espace vectoriel $E = R_2[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à deux.

Si P appartient à E, on désigne par P' son polynôme dérivé.

Soit φ : $\begin{array}{l} E \text{ x } E \to R \\ (P,Q) \to P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0) = \langle P,Q \rangle \end{array}$

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2) Soit $B_c = (1, X, X^2)$ la base canonique de E.

Vérifier que B_c est une base orthogonale de $(E, \langle\ \rangle)$.

Donner une base orthonormée B de $(E, \langle\ \rangle)$.

3) On considère la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Soit $\begin{array}{l} P = a + bX + cX^2 \in E \\ Q = a' + b'X + c'X^2 \in E \end{array}$ Vérifier que $\varphi(P,Q) = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$

4) Soit u un endomorphisme de E et soit A sa matrice dans la base canonique de E.
Montrer l'équivalence des deux propriétés :

a) $\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle u(P), u(Q) \rangle = \langle P,Q \rangle$

b) ${}^t A S A = S$

5) On note $M_3(R)$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Montrer que $G = \{A \in M_3(R), {}^t A S A = S\}$ est un groupe pour la multiplication des matrices carrées.

6) Soit v l'application qui à tout polynôme P de E associe $Q = v(P)$ tel que pour tout x réel, $Q(x) = P(1-x)$.

a) Démontrer que v est un endomorphisme de E.
b) Calculer la matrice de v dans la base canonique de E.
c) Est-ce que v vérifie la propriété définie dans la question 4) ?
d) Montrer que v est bijectif et préciser v^{-1}.

7) Soit $\begin{array}{l} \psi : E \to E \\ P \to \psi(P) = P + P' + P'' \end{array}$ et $\begin{array}{l} \psi_1 : E \to E \\ P \to \psi_1(P) = P - P' \end{array}$

a) Montrer que ψ_1 et ψ sont deux endomorphismes de E.

b) Calculer leurs matrices dans la base canonique de E.

c) Déterminer $\psi \circ \psi_1$; conclusion ?

d) En déduire une solution particulière et la solution générale de l'équation différentielle $y - y' = x^2 + 5x + 9$

8) On considère l'endomorphisme r de E qui a pour matrice dans la base orthonormée *B* de E :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 \\ 1-\sqrt{3} & 1 & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'espace E est orienté de telle façon que la base orthonormée *B* soit directe.

a) Montrer que A est une matrice orthogonale
b) Rechercher les vecteurs invariants par r.
c) En déduire que r est une rotation dont on précisera l'axe et l'angle en ayant choisi une orientation de l'axe.

Problème 2

Le plan P est muni d'un repère orthonormé R = (O ; i , j).

1) Étude complète de l'arc paramétré (C) : $x = t^2$; $y = t^3$

2) Soit (Γ) la courbe d'équation cartésienne dans le repère R :

$$y^2 = \frac{4}{27}\left(x - \frac{4}{27}\right)$$

a) Quelle est la nature de (Γ) ?

b) Vérifier que $t^6 - \frac{4}{27}t^2 + \frac{16}{27^2} = \left(t^2 - \frac{2}{9}\right)^2\left(t^2 + \frac{4}{9}\right)$

c) En déduire que $(C)\cap(\Gamma) = \{A, B\}$, A et B étant deux points symétriques par rapport à l'axe $x'Ox$ dont on donnera les coordonnées ; A sera celui d'ordonnée positive.

d) Montrer que les deux courbes (C) et (Γ) ont même tangente en A, tangente dont on donnera le point d'intersection F avec $x'Ox$. Soit (T) cette tangente.

e) Soit (N) la normale commune à (C) et (Γ) en A ; montrer que $(N)\cap(C) = \{A, D\}$ où D est un point dont on donnera les coordonnées et que (N) est tangente à (C) en D.

f) Calculer les coordonnées du deuxième point d'intersection E de (N) et de (Γ).

3) Sur la feuille de papier millimétré, dessiner avec soin les courbes (C) et (Γ) :

On prendra pour unité de base : $\frac{2}{27}$ en abscisses et en ordonnées, et on mettra l'origine sur le bord gauche de la feuille.

On tracera (T) et (N) et on placera les points A, B, D, E, F.

Fin de l'énoncé