SESSION 2002

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

TSIM207

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont autorisées.

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le problème comprend quatre parties très largement indépendantes, autour de la Lemniscate de Bernoulli: étude d'une propriété angulaire et équation différentielle associée, représentation graphique, calcul de l'aire et expression de la longueur à l'aide de diverses intégrales, algorithme de calcul approché de la longueur par approximations polygonales.

PARTIE I

Dans cette partie, on cherche des courbes planes Γ birégulières dont les tangentes satisfont à une condition angulaire.
Les courbes seront définies par une équation polaire, $\rho = f(\theta)$ où f est de classe C^∞ sur un intervalle J, relativement à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé direct du plan. On utilise les notations usuelles suivantes :
$\vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$;
Le point $M(\theta)$ décrit la courbe ; il est défini par $\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho\,\vec{u}(\theta)$.
$\vec{T}(\theta)$ désigne le vecteur unitaire de la tangente en un point $M(\theta)$ quelconque de la courbe Γ ; les angles de vecteurs α et V sont définis par $\alpha = (\vec{i},\vec{T}(\theta))$ et $V = (\vec{u}(\theta),\vec{T}(\theta))$.
Les courbes cherchées sont celles pour lesquelles, pour tout θ, la tangente au point $M(\theta)$ est orthogonale à la droite engendrée par le vecteur $\vec{u}(3\theta)$.

1. Vérifier que la condition imposée est équivalente à : $\forall\theta \in J,\quad V = 2\theta + \dfrac{\pi}{2}$ modulo π.
2. En déduire que cette condition est vérifiée si et seulement si f est une solution non nulle de l'équation différentielle $\mathcal{E}$: $f'(\theta)\cos 2\theta + f(\theta)\sin 2\theta = 0$.

3. De quel type est l'équation différentielle $\mathcal{E}$? Citer précisément le théorème de résolution correspondant à ce type d'équation (structure et expression de l'ensemble des solutions). Résoudre l'équation différentielle $\mathcal{E}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4},+\frac{\pi}{4}\right[$.

4. On note f_λ la solution de $\mathcal{E}$ sur $\left]-\frac{\pi}{4},+\frac{\pi}{4}\right[$ qui vérifie la condition initiale $f_\lambda(0)=\lambda$ (λ réel non nul), et on note C_λ la courbe d'équation polaire $\rho = f_\lambda(\theta)$. Par quelle transformation géométrique la courbe C_μ est-elle l'image de la courbe C_λ (λ et μ réels distincts non nuls) ?

5. L'équation différentielle $\mathcal{E}$ a-t-elle des solutions non nulles définies sur tout l'ensemble $\mathbb{R}$?

6. On admet que toute solution de $\mathcal{E}$ sur $\left]-\frac{\pi}{4},+\frac{\pi}{4}\right[$ est développable en série entière.
   6.1. Déterminer, par identification dans l'équation différentielle $\mathcal{E}$, les termes de degré inférieur ou égal à trois de la solution f_1 (telle que $f_1(0)=1$).
   6.2. Donner les développements limités en 0 à tout ordre de $x \mapsto \cos 2x$ et de $u \mapsto (1+u)^{1/2}$, et retrouver les résultats de la question précédente par une autre méthode.
   6.3. Calculer les valeurs en 0 des trois premières dérivées de f_1.

PARTIE II

1. Soit C_1 la courbe d'équation polaire $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$ pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4},+\frac{\pi}{4}\right[$, dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   1.1. Étudier et représenter graphiquement la courbe C_1 (unité = 10 cm). Préciser les prolongements par continuité en $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ et l'existence d'une demi-tangente en ces points.

   1.2. Déterminer et dessiner les points à tangente horizontale ou verticale.

   1.3. Déterminer et dessiner le repère de Frénet, ainsi que le centre et le cercle de courbure au point d'angle polaire $\theta = 0$.

2. Justifier la convergence de l'intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$.

3. On définit la longueur L de C_1 comme la limite, si elle existe, quand α tend vers $\frac{\pi}{4}$, de la longueur de la restriction de C_1 à l'intervalle $[-\alpha,+\alpha] \subset \left]-\frac{\pi}{4},+\frac{\pi}{4}\right[$. Démontrer que L existe et que $L = I$.

4. Montrer que L peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

   4.1. $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}$.

   4.2. $L = 2\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$ (on pourra poser $u = \sqrt{\cos(\varphi)}$).

5. Calculer l'aire A du domaine Δ intérieur à C_1 en utilisant la formule $A = \iint_\Delta dxdy$ et un passage en coordonnées polaires.

PARTIE III

1. Pour quelles valeurs des réels α et β l'intégrale $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$ est-elle convergente?
2. Vérifier que $B(\beta,\alpha) = B(\alpha,\beta)$.
3. En posant $t = \sin^2(\theta)$, prouver que

$$\forall(\alpha,\beta) \in \left]0,+\infty\right[^2,\ B(\alpha,\beta) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha-1}(\theta)\cos^{2\beta-1}(\theta)d\theta .$$

4. Montrer que $L = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

PARTIE IV : algorithmique

Préciser quel est le logiciel de calcul formel que vous avez étudié pendant votre préparation au concours et utiliser son langage pour la question 2.

On se propose de calculer une valeur numérique approchée de $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}$ par une méthode géométrique (approximations polygonales).

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, et tout entier k compris entre 0 et n, on note M_k^n le point de C_1 d'angle polaire $\frac{k\pi}{4n}$, et L_n la somme des longueurs des segments $M_{k-1}^n M_k^n$ pour k variant de 1 à n, c'est-à-dire $L_n = \sum_{k=1}^{n} \left\| \overrightarrow{M_{k-1}^n M_k^n} \right\|$, pour la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^2$.

   1.1. Pour $n = 1$, calculer les coordonnées cartésiennes des deux points M_0^1 et M_1^1, et dessiner le segment $M_0^1 M_1^1$. Calculer $2L_1$.

1.2. Pour $n = 2$, calculer les coordonnées cartésiennes des trois points M_k^2, et dessiner les deux segments $M_0^2 M_1^2$ et $M_1^2 M_2^2$. Donner une valeur numérique approchée de $2L_2$.

1.3. Pour $n = 4$, dessiner les segments $M_{k-1}^4 M_k^4$ pour $k \in \{1,2,3,4\}$.

2. Écrire un algorithme (ou une procédure ou un programme) qui calcule et affiche les valeurs numériques approchées des premiers termes de la suite $(2L_{2^p})_{p\in\mathbb{N}}$, jusqu'au plus petit entier $p > 1$ vérifiant $\left|2L_{2^{p-1}} - 2L_{2^p}\right| \leq 10^{-3}$.

Fin de l'énoncé