SESSION 2001 TSI006

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 3 heures

Les calculatrices sont interdites

Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.

Notations et définitions

On appelle base canonique de $\mathbf{R}^n$ la base $(e_1,\dots,e_n)$ où $e_1 = (1,0,\dots,0),\dots,\ e_n = (0,\dots,0,1)$.

Si un élément $x = (x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ vérifie $x_i \geq 0$ (respectivement $x_i > 0$) pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on note $x \geq 0$ (respectivement $x > 0$). Si y est un élément de $\mathbf{R}^n$, $x \geq y$ signifie $x - y \geq 0$, et de même $x > y$ signifie $x - y > 0$.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels, et par $\mathcal{L}_n(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$.

Si A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ si $a_{i,j}$ est le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de A.

On note I_n la matrice unité de $\mathbf{R}^n$ et Id_n l'application identité de $\mathbf{R}^n$.

Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et u l'élément de $\mathcal{L}_n(\mathbf{R})$ admettant A comme matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$, pour tout élément $x = (x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbf{R}^n$, on note parfois Ax au lieu de $u(x)$ l'image de x par u : $Ax = \big((Ax)_1,\dots,(Ax)_n\big)$, avec $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$.

On dit que $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, est <u>à termes positifs</u> (respectivement <u>strictement positifs</u>) si $a_{i,j} \geq 0$ (respectivement $a_{i,j} > 0$) pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$. On note alors $A \geq 0$ (respectivement $A > 0$).

Les deux parties sont indépendantes.

Tournez la page S.V.P.

Première partie

I 1 Dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, donner un exemple de matrice A telle que ni A ni $-A$ ne soient à termes positifs, et pour laquelle il existe un vecteur $x \geq 0$ tel que ni Ax ni $-Ax$ ne soient positifs.

On se place maintenant en dimension n quelconque.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

I 2 Montrer que A est à termes positifs si et seulement si, pour tout élément x de $\mathbf{R}^n$ tel que $x \geq 0$, on a $Ax \geq 0$.

I 3 Montrer que A est à termes strictement positifs si et seulement si, pour tout élément x de $\mathbf{R}^n$ tel que $x \geq 0$ et $x \neq 0$, on a $Ax > 0$.

I 4

I 4.1 Montrer que tout vecteur $x \geq 0$ est limite d'une suite de vecteurs strictement positifs de $\mathbf{R}^n$.

I 4.2 Montrer réciproquement que si x est limite d'une suite de vecteurs strictement positifs de $\mathbf{R}^n$, on a $x \geq 0$.

I 4.3 Montrer que si, pour tout élément x de $\mathbf{R}^n$ tel que $x > 0$, on a $Ax > 0$, alors A est à termes positifs. La matrice A est-elle nécessairement à termes strictement positifs ?

I 5 Soient a, b, c trois nombres réels > 0, et A la matrice (en dimension 3 de nouveau)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

I 5.1 Montrer que $\lambda_1 = a + b + c$ est valeur propre de A, et trouver un vecteur propre associé.

I 5.2 Montrer que le sous-espace propre associé à λ_1 est une droite vectorielle.

I 5.3 Montrer que si λ est une valeur propre de A autre que λ_1, alors $\lambda \in \mathbf{R}$ et $|\lambda| < \lambda_1$.

Deuxième partie

Soit A une matrice inversible, à termes strictement positifs et symétrique, de valeurs propres réelles distinctes ou non $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ rangées par ordre décroissant des valeurs absolues :

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

On admettra que :

i) λ_1 est positive et simple : on note $\lambda_1 = r$ et $s = |\lambda_2|$, $s < r$;

ii) les vecteurs propres associés à $\lambda_1 = r$ sont tous colinéaires à un vecteur $z > 0$: quitte à multiplier z par un scalaire positif, on suppose en outre que $\|z\| = 1$, où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne usuelle de $\mathbf{R}^n$.

On note $<\,,\,>$ le produit scalaire associé à la norme.

II 1 Soit P la matrice de la projection orthogonale sur la droite engendrée par z dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$, et $Q = I_n - P$. Montrer que, pour tout x élément de $\mathbf{R}^n$, on a les relations suivantes :

II 1.1 $\quad \|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 = <x, z>^2 + \|Qx\|^2$;

II 1.2 $\quad APx = PAx$ et $AQx = QAx$;

II 1.3 $\quad \| Ax\|^2 = r^2 \| Px\|^2 + \| AQx\|^2$;

II 1.4 $\quad \| AQx\|^2 \leq s^2 \| Qx\|^2$.

II 2 On pose $t_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\ldots,1)$, élément de $\mathbf{R}^n$, et on définit la suite $(t_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ par la relation de récurrence

$$\begin{cases} t_{k+1} = \dfrac{At_k}{\|At_k\|} & \text{si } t_k \neq 0, \\ t_{k+1} = 0 & \text{si } t_k = 0. \end{cases}$$

(Il résulte de l'inversibilité de A que $At_k \neq 0$ si $t_k \neq 0$, de sorte que cette définition a bien un sens.)

II 2.1 Vérifier que, si $t_0 = z$, alors $t_k = z$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

On suppose $t_0 \neq z$ dans la suite de la question **II.2**.

II 2.2 Montrer que $t_k > 0$ et $t_k \neq z$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

II 2.3 Prouver que $< t_k, z > \in \,]0,1[$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et que

$$< t_{k+1}, z > = \frac{r}{\|At_k\|} < t_k, z > .$$

En déduire que la suite $(< t_k, z >)_{k \in \mathbf{N}}$ est croissante et convergente, puis que

$$\lim_{k \to +\infty} \|At_k\| = r.$$

II 2.4 Vérifier que, pour tout $k \geq 0$,

$$\| Q\, t_{k+1} \| \leq \frac{s}{\|At_k\|} \|Qt_k\|,$$

$$1 - < t_{k+1}, z >^2 \leq \left(\frac{s}{\|At_k\|} \right)^2 \;(1 - < t_k, z >^2).$$

En déduire que $\lim_{k \to +\infty} t_k = z$.

II 2.5 Prouver les identités

$$< t_{k+1}, t_k > = < Pt_{k+1}, Pt_k > + < Qt_{k+1}, Qt_k > = \frac{r}{\|At_k\|}(1 - \|Qt_k\|^2) \;+ < Qt_{k+1}, Qt_k >,$$

pour tout $k \in \mathbf{N}$.

II 3 A partir des résultats précédents, proposer un algorithme itératif de calcul approché de r et de z.

En supposant disponibles les routines de calcul effectuant un produit matrice $\times$ vecteur et calculant la norme d'un vecteur, on décrira l'initialisation de l'algorithme proposé, le contenu d'une boucle d'itération et la procédure d'arrêt des itérations. On demande de justifier les choix effectués, notamment dans la procédure d'arrêt. En revanche, la description des programmes (organigramme, déclaration des variables, etc) est hors-sujet.

Fin de l'énoncé