CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 3 heures

Les calculatrices sont interdites.

Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.

L'objet du problème est la résolution de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_{a,b}):\ y'' + (a + be^{2ix})y = 0$$

pour certaines valeurs des nombres complexes a et b, ainsi que la recherche d'éventuelles solutions de période 2π.

Une solution de $\mathcal{E}_{a,b}$ est une application à valeurs réelles ou complexes, de classe C^2 (au moins), de la variable réelle x et définie sur $\mathbb{R}$.

On pose $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$ pour toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue, de période 2π, et pour tout entier n de $\mathbb{Z}$.

1. Préliminaires: soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, de période 2π.

   1.1. Exprimer $c_n(f)$ en fonction des coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de l'application f, si $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer de même $c_{-n}(f)$ en fonction de $a_n(f)$ et $b_n(f)$, si $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer enfin $c_0(f)$ en fonction de $a_0(f)$.

   1.2. Prouver que la convergence absolue des séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n(f)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} b_n(f)$ est équivalente à la convergence absolue des séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n(f)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} c_{-n}(f)$.

   1.3. Montrer que la série de Fourier de f peut s'écrire sous la forme:

$$c_0(f) + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}\right).$$

2. On suppose dans cette question que b **est nul** et que a **est réel**.

   2.1. Pour quelles valeurs de a l'équation $\mathcal{E}_{a,0}$ admet-elle des solutions non nulles dont 2π est une période?

   2.2. Pour quelles valeurs de a l'équation $\mathcal{E}_{a,0}$ admet-elle des solutions réelles non nulles?

Tournez la page S.V.P.

3. Soit f une application de période 2π, indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et $f^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) sa dérivée k-ème, avec par convention $f^{(0)} = f$.
   3.1. Exprimer $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$, pour tout entier n de $\mathbb{Z}$ (on pourra utiliser une intégration par parties).
   3.2. En déduire une relation entre $c_n(f)$ et $c_n(f^{(k)})$ pour tout $(n, k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$.
   3.3. Dans le cas où f est à valeurs réelles, montrer que pour tout entier k strictement positif, $|c_n(f)|$ et $|c_{-n}(f)|$ sont négligeables devant $\frac{1}{n^k}$, quand l'entier naturel n tend vers l'infini.
   3.4. Dans le cas où f est à valeurs réelles, justifier pour tout x réel et tout k entier naturel la convergence absolue, et donner la somme des séries:
   $$c_0(f^{(k)}) + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n(f^{(k)})e^{inx} + c_{-n}(f^{(k)})e^{-inx}).$$
   Vérifier que l'on peut passer de la série de $f^{(k)}$ à la série de $f^{(k+1)}$ par dérivation terme à terme.

4. On suppose dans cette question que $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ **et** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}$.
   4.1. Prouver que toute solution de $\mathcal{E}_{a,b}$ est indéfiniment dérivable.
   4.2. Prouver que toute solution réelle de $\mathcal{E}_{a,b}$, de période 2π, est développable en série de Fourier, ainsi que ses dérivées successives.
   4.3. Exprimer les coefficients $c_n(g)$ de l'application $g: x \mapsto (a + be^{2ix})f(x)$ en fonction des coefficients $c_m(f)$ pour tout entier n de $\mathbb{Z}$.
   4.4. Montrer que les coefficients $c_n(f)$ d'une solution f de $\mathcal{E}_{a,b}$, de période 2π, vérifient:
   $$\forall n \in \mathbb{Z},\ (n^2 - a)c_n(f) = bc_{n-2}(f).$$

5. On suppose dans cette question et la suivante que $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, et que f est une solution indéfiniment dérivable et de période 2π de $\mathcal{E}_{0,b}$.
   5.1. Exprimer $c_{2p+1}(f)$ en fonction de $c_{2p-1}(f)$ pour $p \in \mathbb{Z}$. Si $c_1(f)$ est nul, calculer $c_{2p+1}(f)$ pour $p \in \mathbb{Z}$. Si $c_1(f)$ n'est pas nul, prouver qu'alors la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} c_{-2p+1}(f)$ n'est pas absolument convergente.
   5.2. Prouver que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ c_{-2p}(f) = 0$.
   5.3. Prouver que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ c_{2p}(f) = \frac{b}{4p^2} c_{2p-2}(f)$.

6. On définit une suite complexe $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\gamma_0 = 1$ et pour tout entier n strictement positif, $\gamma_n = \frac{b}{4n^2}\gamma_{n-1}$, et on définit une fonction φ, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, par $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{2inx}$.

6.1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n z^n$.

6.2. Prouver la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n$, et, pour tout x réel, la convergence absolue de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n e^{2inx}$.

6.3. En admettant que φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et que l'on peut dériver deux fois sa série terme à terme pour trouver φ'', vérifier que φ est une solution non nulle, de période 2π, de l'équation différentielle $\mathcal{E}_{0,b}$.

7. ALGORITHMIQUE: ***Préciser, au début de cette partie, le logiciel de calcul formel que vous avez étudié, et utiliser son langage de programmation pour traiter la question ci-dessous:***

Ecrire un algorithme (ou une procédure, ou un programme) qui,

<u>en fonction</u> a) d'un complexe b non nul,
b) d'un entier $m \geq 1$,
c) d'un réel $x \in [0,2\pi]$,

<u>calcule</u> a) le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $|\gamma_n| \leq 10^{-m}$ (γ_n est défini en question 6),

b) la fonction somme partielle correspondante $S_n : \left| \begin{array}{l} t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \gamma_k e^{2ikt} \\ [0,2\pi] \to \mathbb{C} \end{array} \right.$,

c) une valeur numérique approchée de $S_n(x)$.

Fin de l'énoncé