

## Rapport sur l'épreuve de mathématiques 2

Le problème portait sur le théorème de Perron-Frobenius pour les matrices symétriques réelles. Il s'agissait de faire établir des résultats sur les valeurs propres et sur les vecteurs propres de ces matrices. Une première partie était calculatoire et traitait un exemple des résultats généraux du problème ; elle permettait aux étudiants de montrer leur aptitude à conduire des calculs classiques. Dans la deuxième partie, où l'on faisait démontrer les résultats principaux du problème, les candidats pouvaient mettre en valeur leur capacité de raisonnement.

Afin de ne pas bloquer un étudiant qui n'aurait pas répondu à une question, les résultats demandés étaient donnés dans la première partie et rappelés sous forme de synthèse, à l'issue des questions essentielles de la deuxième partie.

La présentation des copies est globalement satisfaisante, et beaucoup d'étudiants font un effort dans ce sens. Néanmoins, les résultats ne sont pas toujours mis en évidence. Faire ressortir les résultats est essentiel. Quelques candidats ont recopié l'énoncé, c'est inutile.

On peut répartir les copies en trois catégories : Certaines sont très bonnes et leurs auteurs font preuve d'une grande maîtrise des programmes, de la lecture du sujet, du temps imparti et comprennent la globalité du sujet. Dans un second groupe de copies assez bonnes, les candidats traitent correctement la partie I et les points simples de la partie II, apparemment par manque de temps. Il y a enfin un troisième groupe de copies dans lesquelles très peu de questions du problème sont abordées.

### Partie I

Le but de cette partie était de trouver la plus grande valeur propre d'une matrice donnée de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  ainsi qu'un vecteur propre associé à coefficients tous strictement positifs.

Dans la première question, on considérait une suite définie par une relation de récurrence portant sur trois termes consécutifs.  $x_1 = \sin(\theta)$  était donné,  $x_2 = \sin(2\theta)$  résultait d'un calcul élémentaire obtenu par (presque) tous les étudiants. Ces résultats pouvaient suggérer qu'alors le terme général était  $x_p = \sin(p\theta)$ , ce qui se montrait aisément par un raisonnement par récurrence. Un assez grand nombre de candidats a préféré la méthode de recherche classique des suites vérifiant une relation linéaire, en calculant le discriminant de l'équation caractéristique,  $\Delta = -4 \sin^2(\theta) \leq 0$ , mais en oubliant d'étudier le cas  $\Delta = 0$ . La résolution de  $x_{n+1} = 0$  qui suit, soit  $\sin((n+1)\theta) = 0$ , est parfois entachée d'erreurs.

Dans la deuxième question, le calcul des déterminants  $d_1(t)$  à  $d_4(t)$  ne pose en général pas trop de problèmes ; il est en revanche intolérable que les candidats n'achèvent pas les calculs simples : une réponse comme  $d_4(t) = 8t^2(2t^2 - 1) - (4t^2 - 1)$  ou  $16t^4 - 8t^2 - 4t^2 + 1$  ou  $d_4(t) = 2td_3(t) - d_2(t)$  ( $d_3(t)$  et  $d_2(t)$  ayant déjà été calculés), ne peut donner tous les points prévus pour cette réponse.

On rappelle que l'on attend des résultats achevés, un polynôme devant être présenté sous forme factorisée ou ordonné (avec un monôme par degré !).

Dans la suite de la question, pour justifier la relation  $d_n(t) = 2td_{n-1}(t) - d_{n-2}(t)$ , que beaucoup trouvent, il y a une juste mesure entre une démonstration par récurrence (sans utiliser l'hypothèse de récurrence !) et la formule sèche ; elle consiste à écrire qu'on l'obtient en développant  $d_n(t)$  selon la première colonne.

Beaucoup d'étudiants ont su traiter la troisième question, en oubliant parfois qu'ils utilisaient une récurrence forte et qu'il fallait vérifier la formule sur deux termes consécutifs. Trop de candidats n'ont pas tenu compte de la restriction  $0 < \theta < \pi$ .

La quatrième question était la synthèse des questions précédentes. Tout d'abord il fallait montrer que la matrice  $A_n(0)$  avait  $n$  valeurs propres distinctes. L'énoncé conduisait à trouver comme valeurs propres particulières les réels  $\lambda_k = -2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$  pour  $1 \leq k \leq n$ . Cette question a été très rarement bien traitée, il manque toujours au moins un argument alors que l'idée de départ est très fréquemment perçue. Pour accorder tous les points, on aurait souhaité lire les justifications élémentaires suivantes : une matrice carrée d'ordre  $n$  a au plus  $n$  valeurs propres, la fonction cosinus est strictement monotone sur le segment  $[0, \pi]$ , donc les  $\lambda_k$  trouvés sont les  $n$  valeurs propres de  $A_n(0)$ .

Arrivés là, beaucoup d'étudiants ont été troublés par le signe – dans l'expression des  $\lambda_k$ , pour prouver que la plus grande valeur propre était  $\rho = 2 \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ . Les plus honnêtes avouent leur incompréhension, mais beaucoup “oublient” opportunément le signe – dans un changement de ligne ou l'effacent ; certains évoquent la parité du cosinus ou une erreur d'énoncé... Si l'honnêteté intellectuelle ne rapporte pas directement de point, elle donnera néanmoins une impression favorable face à une réponse ultérieure peu claire et demandant plus de précision.

On rappelle qu'il existe des formules permettant de changer le signe devant une fonction trigonométrique : par exemple  $-\cos(\alpha) = \cos(\pi - \alpha)$ . Cette formule conduisait, par un changement d'indices, aux valeurs propre  $\lambda_p = 2 \cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)$ ,  $1 \leq p \leq n$  et donnait la valeur attendue de  $\rho$ . La fin de cette question montre une différence très nette entre les candidats, seuls les meilleurs la traitent, sans oublier de vérifier la condition  $x_{n+1} = 0$ .

## Partie II

Dans cette partie, on travaillait dans l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$  rapporté à une base orthonormale.

La première question portait sur le calcul de la norme subordonnée d'un endomorphisme (la définition était rappelée) sous différentes hypothèses. II.1.1 est traitée correctement, en revanche II.1.2, qui nécessitait de montrer deux inégalités, est souvent mal abordée : utilisation d'une autre norme car on est en dimension finie, qui ne conduit à aucun résultat. Dans II.1.3 le théorème spectral a souvent été vu mais l'étudiant oubli parfois de dire qu'il faut prendre une base orthonormale de vecteurs propres, pour utiliser le résultat précédent.

Dans la suite du problème, on considère un endomorphisme autoadjoint  $l$  et l'application  $\Phi$  de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}$  définie par :  $\Phi(u) = (l(u)|u)$ .

La deuxième question porte sur la plus grande valeur propre de  $l$  et nécessite un raisonnement d'analyse sur la fonction  $\Phi$ . Il s'agissait d'abord de montrer que la fonction  $\Phi$  est continue. Beaucoup d'étudiants ont voulu montrer que  $\Phi$  était une application linéaire, alors que c'est une forme quadratique, ou qu'elle était Lipschitzienne à l'origine ; elle ne l'est pas et n'est pas non plus linéaire. Les arguments à utiliser étaient la continuité de  $l$  en dimension finie et la continuité du produit scalaire. Quelques étudiants ont remarqué que

$\Phi(u)$  était un polynôme des coordonnées de  $u$  et donc que  $\Phi$  était continue, c'est exact.

Il fallait en déduire que  $\Phi$  avait un maximum sur la sphère unité  $S$  de  $\mathbf{R}^n$  ; il suffisait d'écrire que  $S$  est un ensemble compact, car fermé et borné, et qu'une fonction continue définie sur un compact a un maximum. Pour certains candidats,  $S$  est un intervalle, parfois un ensemble fini.

Dans la deuxième partie de la question, la détermination d'un réel  $\alpha$  pour qu'un vecteur qui en dépend soit de norme 1 a révélé des lacunes dans le développement d'un carré scalaire. Les questions qui suivaient étaient plus difficiles.

La troisième partie de la question II est correctement traitée, le résultat  $\Phi(x) = \lambda$  n'est pas donné mais beaucoup le trouvent.

A l'issue de cette question essentielle et difficile, les résultats obtenus étaient rappelés. Le problème se poursuit avec l'introduction de la matrice de  $l$  qui vérifie deux conditions (1) les coefficients sont  $\geq 0$  et une condition (2) qui ne sert que dans la question II.5.

Pour un vecteur  $x$  on donne les définitions de  $x \geq 0$ ,  $x > 0$  et du vecteur  $x^+$ .

Dans la troisième question, le calcul de  $\Phi(x)$  est souvent inexact :  $\sum_{i,j} a_{i,j} x_i^2$  au lieu de  $\sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j$ . Pourtant, il ne s'agissait que d'exprimer les composantes de  $l(x)$  et de développer un produit scalaire, en utilisant le fait que la base est orthonormale. Pour répondre à la fin de cette question, les étudiants devaient remarquer que lorsque  $x$  est dans  $S$ , le vecteur  $x^+$  est aussi dans  $S$ .

La quatrième question est assez bien faite, à ceci près que le vecteur  $x$  de cette question n'est plus celui vérifiant  $\rho = \Phi(x)$  de la question II.3.

Le début de la question II.5 était de difficulté comparable aux questions II.3 et II.4. Quelques candidats ont trouvé une démonstration originale, utilisant l'égalité dans l'inégalité de Schwarz. La fin de la question, utilisant la condition (2) de la matrice de  $l$ , était difficile, elle était traitée dans les très bonnes copies.

Avec la question suivante on revenait à une difficulté moyenne, mais les vecteurs n'étaient plus dans  $S$ , il fallait penser à les normer pour utiliser les résultats précédents.

Les remarques précédentes sont valables pour le début de la question II.7, en revanche la fin de cette question demandait de l'initiative, le candidat devant penser à l'orthogonalité des sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint.

Enfin la question II.8 était une application des résultats de la partie II du problème. Il était simple d'écrire la matrice  $A$  pour  $n = 4$  ou  $5$ , de remarquer que ses coefficients étaient  $\geq 0$  (condition (1)), qu'elle était symétrique (matrice d'un endomorphisme autoadjoint) et que le vecteur  $v$  de composantes toutes = 1 se transformait en  $2v$ . En admettant la condition (2), plus difficile à montrer, on pouvait conclure que la plus grande valeur propre était 2.

En conclusion, l'équipe des correcteurs donne les conseils suivants aux étudiants :

- s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion
- terminer les calculs et donner des résultats achevés
- penser à utiliser les résultats donnés pour résoudre les questions qui suivent
- se placer scrupuleusement dans les hypothèses des questions dont on utilise les résultats.

Christian Dupuis