Le problème portait sur une méthode d'intégration numérique, utilisant une famille de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire défini par une intégrale : les polynômes de Tchebychev. Aucune connaissance de ces polynômes n'était requise de la part des candidats pour traiter le problème.

Les deux premières parties du problème nécessitaient une bonne assimilation du cours, accompagnée de rigueur dans le traitement des questions. Le niveau de difficulté de la troisième partie était plus relevé, avec des questions qui demandaient plus de doigté et de réflexion.

Dans la première partie, on étudiait une famille de polynômes, définis sur l'intervalle [-1,1] à l'aide des fonctions cosinus et arccosinus. Cette partie a été globalement bien traitée. On peut, toutefois, regretter que trop de candidats tracent les graphes demandés au-delà de l'intervalle [-1,1] et ne traitent pas de façon assez précise cette question facile ; de ce fait, ils ont été pénalisés.
Quant aux racines des polynômes, qui étaient les réels x_k de l'énoncé, si elles sont trouvées, une justification sérieuse de l'intervalle $[\![0, n-1]\!]$ de variation de l'indice k aurait été appréciée. De même, on aurait souhaité voir mis en évidence les arguments essentiels du raisonnement par récurrence de la fin de cette partie.

Dans la deuxième partie, on définissait un produit scalaire à l'aide d'intégrales de fonctions continues sur l'intervalle [-1,1] et on montrait que les polynômes, introduits dans la première partie, formaient une base orthogonale d'un espace vectoriel R_n de polynômes. On obtenait ainsi une formule de calcul d'intégrales portant sur les polynômes de l'espace R_5, à l'aide de la valeur de ces polynômes en trois points x_k.
L'intégrabilité de la fonction $\dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est généralement mal traitée ; en revanche le calcul des intégrales I_n est globalement bien fait, les problèmes liés au changement de variable sur un intervalle ouvert étant parfois éludés. De même, la vérification des propriétés du produit scalaire est parfois bâclée, en particulier l'utilisation de la continuité de la fonction en -1 et en 1.

La question **3.3**, a été traitée par peu de candidats, mais ceux qui l'ont abordée ont donné des réponses plutôt satisfaisantes.
Enfin, signalons le changement de variable possible, $t = \sqrt{x}$, dans la dernière intégrale, qui conduisait de façon immédiate à $J = I_8$ (au lieu de $J = cI_4$ avec celui proposé) ; heureusement peu de candidats l'ont vu !

La troisième partie, n'a été que partiellement abordée. A côté des questions difficiles nécessitant une bonne connaissance du cours et des raisonnements approfondis (valeur et unicité des coefficients a_K, utilisation du théorème de Weierstrass-Stone, passages à la limite), elle contenait des questions très classiques comme la convergence de la série

$\sum \frac{1}{k!}$, ou l'approximation de la fonction exponentielle par la somme partielle de son développement en série entière.

Pour conclure ce rapport, on peut souhaiter que les candidats fassent preuve de concision dans les questions classiques (raisonnements par récurrence, produits scolaires), en dégageant les arguments essentiels à la démonstration.
Toutefois, ce souhait ne doit pas encourager à une rédaction schématique et insuffisante comme on le voit parfois. La phrase « ce qui se conçoit bien s'énonce clairement et les mots pour le dire arrivent aisément » reste d'actualité.