ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES II

par Pierre MARRY

Le problème d'Analyse de cette année était volontairement conçu plus court et plus simple que ceux des années précédentes. Sa seule ambition était de tester chez les candidats, d'une part leur connaissance des théorèmes fondamentaux au programme (Cauchy-Lipschitz, séries entières, intégrales dépendant d'un paramètre, convergence des séries de Fourier,...), d'autre part leur aptitude à les mettre en œuvre et a effectuer quelques calculs classiques ne demandant aucune astuce particulière (recherche de solutions d'une équation différentielle linéaire sous forme de somme de série entière, intégrations par parties,...).

Si les théorèmes généraux semblent généralement assez bien connus, leur mise en œuvre reste toutefois assez problématique. Beaucoup de candidats ne pensent pas à utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz pour montrer l'identité de deux solutions d'une équation différentielle linéaire, ne savent pas effectuer la majoration nécessaire de l'intégrand pour montrer la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Le théorème de Dirichlet et celui de la convergence normale des séries de Fourier sont connus, mais peu de candidats ont une idée précise de ce qu'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et pensent à vérifier la continuité de la fonction pour pouvoir appliquer lesdits théorèmes. L'application du critère de d'Alembert aux séries entières lacunaires donne toujours lieu aux mêmes erreurs (oubli de vérifier la non-nullité des coefficients, utilisation du rapport de deux coefficients consécutifs au lieu de celui de deux termes consécutifs, oubli de la valeur absolue).

Pour ce qui est des calculs, les correcteurs ont souvent rencontré l'identité $[f(-x)]' = f'(-x)$. Beaucoup de candidats ont rencontré des difficultés dans la dérivation terme à terme d'une somme de série entière, en ce qui concerne le champ de variation de l'indice de sommation, et ont écrit :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n+1}x^{2n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)c_{2n+1}x^{2n}, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n+1}x^{2n+1}\right)'' = \sum_{n=2}^{+\infty}2n(2n+1)c_{2n+1}x^{2n-1},$$

d'où des relations fausses entre les premiers termes.

La majorité des candidats effectue directement une intégration par parties sur un intervalle semi-ouvert, sans passer d'abord par un segment contenu dans l'intervalle, et omettent de vérifier que tous les termes ainsi obtenus ont un sens.

Dans la recherche d'une condition pour qu'une équation différentielle admette des solutions polynomiales non identiquement nulles, la majorité des candidats s'est polarisée sur l'expression "non identiquement nulles", en déduisant qu'*aucun* des coefficients de la série entière ne devait s'annuler, et arrivant ainsi à un résultat exactement à l'opposé de celui qui était attendu.

On trouve souvent des simplifications abusives :

- $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^x dt$ est définie pour $x > -1$, car en posant $u = 1-t^2$ on retombe sur l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^{-x}}$.

- les coefficients a_{2k+1} d'une série de Fourier sont nuls parce que la fonction est impaire.

- la fonction $x \mapsto |\cos x|^\gamma$ est de classe $\mathcal{C}^0$ (ou $\mathcal{C}^1$, ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux) comme composée de telles fonctions (sans se préoccuper de la valeur de γ).

Enfin, on retrouve des erreurs inquiétantes, bien que classiques :

factorielles de nombres non entiers ; toute fonction qui n'est pas paire est impaire ; $g_s'(0) = 0$ donc g_s est constante sur $]-1,+1[$; si $f(x)$ est solution d'une équation différentielle sur $]-1,+1[$, $f(-x)$ l'est aussi car $]-1,+1[$ est symétrique par rapport à 0 ...