Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction ; si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PARTIE I

Pour tout nombre réel s, on considère l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre $(\mathcal{E}_s)$ suivante :

$$(\mathcal{E}_s) \qquad (1-x^2)\, y''(x) - 2(s+2)\, xy'(x) - 2(s+1)\, y(x) = 0.$$

On note f_s la solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $]-1,+1[$ qui vérifie les conditions initiales $f_s(0) = 0$ et $f_s'(0) = 1$.

I.1. Soit g_s la fonction définie sur $]-1,+1[$ par $g_s(x) = f_s(x) + f_s(-x)$.

I.1.1. Montrer que g_s est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $]-1,+1[$.

I.1.2. Calculer $g_s(0)$ et $g_s'(0)$. En déduire que f_s est impaire.

I.2. Déterminer en fonction de s l'unique valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que la fonction $x \mapsto (1-x^2)^\alpha$ soit solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $]-1,+1[$.

I.3. Soit u_s la fonction définie sur $]-1,+1[$ par $u_s(x) = (1-x^2)^{s+1} f_s(x)$.

I.3.1. Montrer que la dérivée u_s' de u_s est solution sur $]-1,+1[$ de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_s') \qquad (1-x^2)\, y'(x) + 2sxy(x) = 0.$$

I.3.2. Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_s')$ sur $]-1,+1[$.

I.3.3. Calculer $u_s'(0)$ et $u_s(0)$. En déduire que $u_s(x) = \displaystyle\int_0^x (1-t^2)^s\, dt$ pour tout $x \in]-1,+1[$.

I.4. Soit y une fonction impaire, définie sur un intervalle ouvert I contenant 0, développable en série entière sur I. On note $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$ le développement en série entière de y sur I.

I.4.1. Montrer que pour que y soit solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur I, il faut et il suffit que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_{n+1} = \frac{2s+2n+3}{2n+3} c_n.$$

I.4.2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de c_n en fonction de n et c_0.

I.4.3. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ l'équation $(\mathcal{E}_s)$ admet-elle des solutions polynomiales impaires non identiquement nulles ?

I.4.4. On suppose que $s \notin \{-n - \frac{3}{2} \,;\, n \in \mathbb{N}\}$, que $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$ est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur I, et que $c_0 \neq 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$.

I.5. Déduire des questions précédentes que pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $x \in]-1, +1[$ on a :

$$f_s(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^{n} (2s+2k+1) \right] x^{2n+1}.$$

I.6. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, +1[$ on a :

$$\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{p+\frac{3}{2}}} = \frac{Q_p(x)}{(1-x^2)^{p+\frac{1}{2}}},$$

où Q_p est une fonction polynomiale impaire de degré $2p+1$ que l'on explicitera.
Expliciter en particulier $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$ et $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}}$.

PARTIE II

On considère la fonction β de la variable réelle x définie par :

$$\beta(x) = \int_0^1 (1-t^2)^x \, dt.$$

II.1. Déterminer le domaine de définition de β.

II.2. Montrer que β est continue sur $]-1, +\infty[$.
On admettra que β est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \beta'(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^x \ln(1-t^2) dt$.

II.3. Montrer que β est strictement monotone sur $]-1, +\infty[$ et préciser son sens de variation.

II.4.

II.4.1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'on a $\beta(x+1) = \dfrac{2x+2}{2x+3} \beta(x)$ pour tout $x > -1$.

II.4.2. Calculer $\beta(0)$. En déduire la limite de $\beta(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

II.4.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donner une expression de $\beta(n)$ à l'aide de factorielles. En utilisant la formule de Stirling, déterminer un équivalent de $\beta(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la limite de $\beta(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$, puis celle de $\beta(x)$, $x \in \mathbb{R}$, lorsque x tend vers $+\infty$.

II.4.4. Calculer $\beta\left(-\frac{1}{2}\right)$. En déduire la valeur de $\beta\left(-\frac{1}{2}+n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE III

Soit γ un nombre réel strictement supérieur à 1, non entier. Soit φ_γ la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_\gamma(x) = |\cos x|^\gamma .$$

On note $a_0(\gamma) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(\gamma)\cos nx + b_n(\gamma)\sin nx]$ la série de Fourier de φ_γ.

III.1.

III.1.1. Préciser pourquoi φ_γ est égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier.

III.1.2. Que peut-on dire des coefficients $b_n(\gamma)$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_{2p+1}(\gamma)$, $p \in \mathbb{N}$?

III.2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on considère l'intégrale $I_p = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x.\cos 2px\, dx$.

III.2.1. Montrer que $I_p - I_{p+1} = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \sin x.\sin(2p+1)x\, dx$.

III.2.2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I_p - I_{p+1} = 2\frac{2p+1}{\gamma+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x.\cos x\cos(2p+1)x\, dx.$$

III.2.3. En déduire que $I_p - I_{p+1} = \dfrac{2p+1}{\gamma+1}\,[I_p + I_{p+1}]$.

III.2.4. Montrer que $I_0 = \beta(\gamma')$, où γ' est un nombre réel strictement positif que l'on calculera en fonction de γ.

III.2.5. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a $I_p = \dfrac{\gamma}{\gamma+2p}A_p(\gamma)\beta(\gamma')$, où $A_p(\gamma) = \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}\frac{\gamma-2k}{\gamma+2k}$.

III.3. Déduire de ce qui précède les valeurs de $a_0(\gamma)$ et de $a_{2p}(\gamma)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Fin de l'énoncé