ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES II

par Pierre MARRY
Maître de conférences au CNAM

Le sujet de l'épreuve d'Analyse de cette année tournait autour de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$. Dans une première partie, on étudiait en détail le domaine de convergence de cette série entière, ainsi que certaines propriétés de sa somme. La seconde partie était consacrée à la fonction ζ de Riemann (cas où $z = 1$). Enfin, dans la troisième partie, on déduisait de la première partie, à l'aide de séries de Fourier, des expressions de certaines intégrales comme sommes de séries numériques. Compte tenu du résultat désastreux de l'année précédente, toutes les questions difficiles avaient été *monnayées* en sous-questions indiquant pas à pas la marche à suivre, et un candidat connaissant précisément les grands théorèmes d'analyse du programme aurait dû pouvoir réaliser un *sans-faute*.

De fait, la moyenne de l'épreuve (6,21/20) est de près d'un point supérieure à celle de l'an dernier (5,29/20), et à peu près toutes les questions posées ont été abordées par des candidats. Le pourcentage de bons, voire très bons, candidats reste stable, bien que faible. Le pourcentage de très mauvais candidats, présentant un déficit catastrophique sur le plan des connaissances, de la rigueur, voire de la logique la plus élémentaire, reste lui aussi stable, hélas ! Ignorance de la différence entre condition nécessaire et condition suffisante, confusion entre les propriétés du logarithme et celles de l'exponentielle, ignorance des formules élémentaires de trigonométrie sont monnaie courante.

Parmi les parties du cours pour lesquelles on constate une nette amélioration des connaissances des candidats, il faut signaler les séries de Fourier : les expressions des coefficients, les théorèmes de convergence sont assez généralement bien connus, même si un certain flou demeure sur leur dénomination. En particulier le théorème de convergence normale est assez souvent appelé *théorème de Dirichlet* . Dans sa quête du Graal, un candidat wagnérien utilise *l'égalité de Parsifal* (probablement monté sur un *étalon de Riemann*, selon l'expression d'un autre candidat). Mais tout cela reste anecdotique.

En revanche, sont très mal maîtrisées les hypothèses des divers théorèmes permettant des interversions de limites : théorèmes de convergence dominée, de convergence monotone, dérivation sous les signes $\int$ et $\sum$, etc…, qui sont tout de même les outils principaux de l'analyse dont disposent les candidats. Si ce manque de maîtrise n'a pas empéché ces derniers d'avancer dans le problème, il leur a néanmoins coûté de nombreux points, car le barême était très exigeant sur la rigueur des démonstrations. Mais il est finalement logique que les candidats aient quelques problèmes avec la notion de limite, qu'ils n'ont que deux ans pour apprendre à maîtriser, au vu de la nullité des programmes du deuxième cycle sur cette question. Pourtant, la manipulation des ε et des α reste la base du calcul scientifique qu'ils auront à effectuer en tant qu'ingénieurs.

Qu'il me soit permis ici de rappeler à mes collègues de classes préparatoires que le critère de d'Alembert spécifique aux séries entières : $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, n'est plus au programme depuis 1996 pour des raisons évidentes (cas de séries *à trous*, oubli des valeurs absolues, etc…) et que seul subsiste le critère de d'Alembert pour les séries numériques à termes positifs. Les candidats, s'ils souhaitent utiliser ce critère pour des séries entières, doivent donc étudier la limite du rapport $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|$ et en tirer les conséquences qui s'imposent, à l'exclusion de toute autre méthode. Toute détermination du rayon de convergence à l'aide de $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, quand ce n'est pas $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, se voit automatiquement attribuer la note 0, que le résultat soit exact ou non, et ce depuis déjà huit ans ! Il est dommage que l'information n'arrive pas à passer, après tant d'années.