SESSION 2002 **TSIM104**

CONCOURS COMMUNS POLYTECHHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Notations du problème

Soit n un entier naturel non nul, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Soit $A = [a_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
i indique le numéro de la ligne de $a_{i,j}$.
j indique le numéro de la colonne de $a_{i,j}$.
On appelle trace de A et on note $\operatorname{tr}(A)$ le nombre réel $\operatorname{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.
$GL_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
I_n désigne la matrice unité d'ordre n.
$S_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques.
$A_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques, c'est-à-dire telles que ${}^tA = -A$.

PARTIE I

1) Montrer que l'application tr est une application linéaire.
2) Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Est-ce que l'on a $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$?
   Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
3) Soit P dans $GL_n(\mathbb{R})$ et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}\left(P^{-1}AP\right) = \operatorname{tr}(A)$.
4) Soit A et B, 2 matrices semblables.
   Que peut-on dire de leurs polynômes caractéristiques ?
   Que représente $\operatorname{tr}(A)$ relativcrnent aux coefficients du polynôme caractéristique P'_AX de A ?
   Retrouver ainsi le résultat de la question 3).
5) Existe-t-il des matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = 2I_n$?
6) Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

PARTIE II

Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\langle A|B\rangle = \operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$.

1) Montrer que l'application $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \langle A|B\rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On considèrera l'espace vectoriel euclidien $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \langle\ |\ \rangle)$ pour toute la suite et $\|A\| = \sqrt{\langle A|A\rangle}$ la norme associée.
On vérifiera que $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$.

2) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\langle S|A\rangle = 0$.
En déduire que $A_n(\mathbb{R}) = (S_n(\mathbb{R}))^{\perp}$ est le supplémentaire orthogonal de $S_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

4) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = A'+A''$ l'unique décomposition de A selon la somme directe $S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})$.
Justifier que $\forall M, M \in S_n(\mathbb{R}), \|A - M\|^2 \geqslant \|A - A'\|^2$.
En déduire que

$$\inf_{M\in S_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 = \left\| \frac{{}^tA - A}{2} \right\|^2.$$

5) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = (1 - x)^2 + (4 - z)^2 + (2 - y)^2 + (3 - y)^2$.
Montrer que f a un minimum absolu que l'on calculera. On précisera en quel point ce minimum est atteint.

6) Soit A, B, C dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = A{}^tA$ et ${}^tBB = B{}^tB$.
Calculer $\|AC - CB\|^2$ et $\left\|{}^tAC - C{}^tB\right\|^2$.
À l'aide de I.2) vérifier que

$$\left\|{}^tAC - C{}^tB\right\|^2 - \|AC - CB\|^2 = 0.$$

En déduire que $(AC = CB) \Leftrightarrow \left({}^tAC = C{}^tB\right)$.

PARTIE III

L'objectif de cette partie est d'établir la propriété suivante par récurrence sur n.
$\mathscr{A}(n)$: soit $\{S_1, S_2, \ldots, S_p\}$ un ensemble de p matrices carrées d'ordre n symétriques permutant 2 à 2 :

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2, S_iS_j = S_jS_i.$$

Alors il existe une matrice orthogonale Ω d'ordre n telle que
$\forall i \in \{1, \ldots, p\}, \Omega^{-1}S_i\Omega$ soit une matrice diagonale.

1) Que peut-on dire de la propriété pour $n = 1$?

2) On suppose que n est supérieur ou égal à 2 et que la propriété est vraie jusqu'au rang $(n - 1)$. Les matrices symétriques S_1, …, S_p d'ordre n permutent 2 à 2.

2.1) Que peut-on dire si toutes les matrices S_1, …, S_p sont diagonales ?

2.2) On suppose dans toute la suite que S_1 n'est pas une matrice diagonale. Justifier l'existence d'un entier r, d'un réel λ, d'une matrice diagonale Δ d'ordre $n-r$ et d'une matrice orthogonale Ω_1 d'ordre n tels que : $1 \leqslant r \leqslant n - 1$, $\Omega_1^{-1}S_1\Omega_1 = \begin{pmatrix} \lambda I_r & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$ où 0 désigne des blocs nuls et où λ ne figure pas sur la diagonale de Δ.

2.3) Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on écrit la matrice $\Omega_1^{-1}S_i\Omega_1 = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{pmatrix}$ sous forme de 4 blocs où A_i est carré d'ordre r et C_i carré d'ordre $n - r$.
Montrer que $D_i = {}^tB_i$ et que A_i et C_i sont symétriques.

2.4) Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, montrer que $S_1S_i = S_iS_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda B_i = B_i\Delta \\ \Delta C_i = C_i\Delta \end{array} \right.$
En déduire que B_i et D_i sont des blocs nuls.

2.5) Montrer que $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2, S_iS_j = S_jS_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_iA_j = A_jA_i \\ C_iC_j = C_jC_i \end{array} \right.$

2.6) En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\{A_1, \ldots, A_p\}$ et à $\{C_1, \ldots, C_p\}$ terminer la démonstration.

3) On considère les deux ensembles de matrices d'ordre deux $\{A_1, A_2, A_3\}$ et $\{C_1, C_2, C_3\}$ définis par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

3.1) Vérifier que ces deux ensembles vérifient l'hypothèse figurant dans $\mathscr{A}(n)$ au début de la partie III et donner un exemple de matrices orthogonales Ω_2 et Ω_2' telles que $\Omega_2^{-1} A_i \Omega_2$ et $(\Omega_2')^{-1} C_i \Omega_2'$ soient des matrices diagonales à préciser.

3.2) Soit les matrices d'ordre 4 écrites par blocs $S_i = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & C_i \end{pmatrix}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres communs à S_1, S_2, S_3 et indiquer les valeurs propres correspondantes pour chaque matrice.

Fin de l'énoncé